

## 2015年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

## 数学（理科）

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，满分40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1、若集合  $M = \{x | (x+4)(x+1) = 0\}$ ， $N = \{x | (x-4)(x-1) = 0\}$ ，则  $M \cap N =$  ( )

- A.  $\{1, 4\}$                       B.  $\{-1, -4\}$                       C.  $\{0\}$                       D.  $\emptyset$

2、若复数  $z = i(3-2i)$  ( $i$ 是虚数单位)，则  $\bar{z} =$  ( )

- A.  $2-3i$                       B.  $2+3i$                       C.  $3+2i$                       D.  $3-2i$

3、下列函数中，既不是奇函数，也不是偶函数的是 ( )

- A.  $y = \sqrt{1+x^2}$                       B.  $y = x + \frac{1}{x}$                       C.  $y = 2^x + \frac{1}{2^x}$                       D.  $y = x + e^x$

4、袋中共有15个除了颜色外完全相同的球，其中有10个白球，5个红球。从袋中任取2个球，所取的2个球中恰有1个白球，1个红球的概率为 ( )

- A.  $\frac{5}{21}$                       B.  $\frac{10}{21}$                       C.  $\frac{11}{21}$                       D. 1

5、平行于直线  $2x+y+1=0$  且与圆  $x^2+y^2=5$  相切的直线的方程是 ( )

- A.  $2x+y+5=0$  或  $2x+y-5=0$                       B.  $2x+y+\sqrt{5}=0$  或  $2x+y-\sqrt{5}=0$   
C.  $2x-y+5=0$  或  $2x-y-5=0$                       D.  $2x-y+\sqrt{5}=0$  或  $2x-y-\sqrt{5}=0$

6、若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 4x+5y \geq 8 \\ 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$ ，则  $z = 3x + 2y$  的最小值为 ( )

- A. 4                      B.  $\frac{23}{5}$                       C. 6                      D.  $\frac{31}{5}$

7、已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的离心率  $e = \frac{5}{4}$ ，且其右焦点为  $F_2(5, 0)$ ，则双曲线  $C$  的方程为 ( )

- A.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$                       B.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$                       C.  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$                       D.  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$

8、若空间中  $n$  个不同的点两两距离都相等，则正整数  $n$  的取值 ( )

- A. 至多等于3                      B. 至多等于4                      C. 等于5                      D. 大于5

二、填空题（本大题共7小题，考生作答6小题，每小题5分，满分30分.）

（一）必做题（11~13题）

9、在 $(\sqrt{x}-1)^4$ 的展开式中， $x$ 的系数为\_\_\_\_\_.

10、在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=25$ ，则 $a_2+a_8=$ \_\_\_\_\_.

11、设 $\triangle ABC$ 的内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ . 若 $a=\sqrt{3}$ ,  $\sin B=\frac{1}{2}$ ,  $C=\frac{\pi}{6}$ , 则 $b=$ \_\_\_\_\_.

12、某高三毕业班有40人，同学之间两两彼此给对方仅写一条毕业留言，那么全班共写了\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_条毕业留言.（用数字作答）

13、已知随机变量 $X$ 服从二项分布 $B(n, p)$ ，若 $E(X)=30$ ， $D(X)=20$ ，则 $p=$ \_\_\_\_\_.

（二）选做题（14、15题，考生只能从中选作一题）

14、（坐标系与参数方程选做题）已知直线 $l$ 的极坐标方程为 $2\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ ，点 $A$ 的

极坐标为 $A\left(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$ ，则点 $A$ 到直线 $l$ 的距离为\_\_\_\_\_.

15、（几何证明选讲选做题）如图1，已知 $AB$ 是圆 $O$ 的直径， $AB=4$ ， $EC$ 是圆 $O$ 的切线，切点为 $C$ ， $BC=1$ . 过圆心 $O$ 作 $BC$ 的平行线，分别交 $EC$ 和 $AC$ 于点 $D$ 和点 $P$ ，则 $OD=$ \_\_\_\_\_.

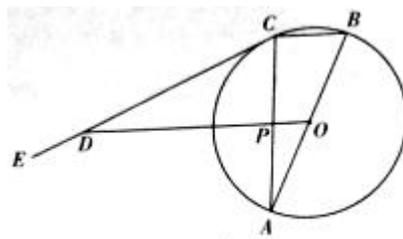


图1

三、解答题

16.（本小题满分12分）

在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知向量 $\vec{m} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $\vec{n} = (\sin x, \cos x)$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(1) 若 $\vec{m} \perp \vec{n}$ ，求 $\tan x$ 的值；

(2) 若 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ，求 $x$ 的值.

17.（本小题满分12分）

某工厂36名工人年龄数据如下表

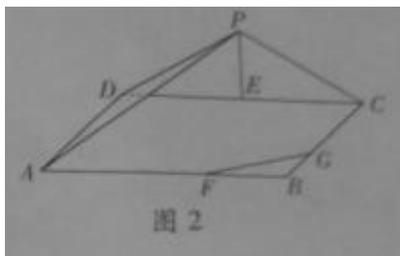
工人编号	年龄	工人编号	年龄	工人编号	年龄	工人编号	年龄
1	40	10	36	19	27	28	34
2	44	11	31	20	43	29	39
3	40	12	38	21	41	30	43
4	41	13	39	22	37	31	38
5	33	14	43	23	34	32	42
6	40	15	45	24	42	33	53
7	45	16	39	25	37	34	37
8	42	17	38	26	44	35	49
9	43	18	36	27	42	36	39

- (1) 用系统抽样法从 36 名工人中抽取容量为 9 的样本，且在第一分段里用随机抽样法抽到的年龄数据为 44，列出样本的年龄数据；
- (2) 计算 (1) 中样本的均值  $\bar{x}$  和方差  $s^2$ ；
- (3) 36 名工人中年龄在  $\bar{x} - s$  和  $\bar{x} + s$  之间有多少人？所占百分比是多少（精确到 0.01%）？

18. (本小题满分 14 分)

如图 2，三角形  $PDC$  所在的平面与长方形  $ABCD$  所在的平面垂直， $PD = PC = 4, AB = 6, BC = 3$ ，点  $E$  是  $CD$  的中点，点  $F, G$  分别在线段  $AB, BC$  上，且  $AF = 2FB, CG = 2GB$ 。

- (1) 证明： $PE \perp FG$ ；
- (2) 求二面角  $P - AD - C$  的正切值；
- (3) 求直线  $PA$  与直线  $FG$  所成角的余弦值。



19. (本小题满分 14 分)

设  $a > 1$ ，函数  $f(x) = (1 + x^2)e^x - a$

- (1) 求  $f(x)$  的单调区间；
- (2) 证明  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上仅有一个零点；
- (3) 若曲线  $y = f(x)$  在点  $P$  处的切线与  $x$  轴平行，且在点  $M(m, n)$  处的切线与直线  $OP$  平行，( $O$  是

坐标原点)，证明： $m \leq \sqrt[3]{a - \frac{2}{e}} - 1$ 。

20. (本小题满分 14 分)

已知过原点的动直线  $l$  与圆  $C_1 : x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$  相交于不同的两点 A、B.

- (1) 求圆  $C_1$  的圆心坐标;
- (2) 求线段 AB 的中点 M 的轨迹 C 的方程;
- (3) 是否存在实数  $k$ , 使得直线  $l : y = k(x - 4)$  与曲线 C 只有一个交点? 若存在, 求出  $k$  的取值范围; 若不存在, 说明理由.

21. (本小题满分 14 分)

数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}, n \in N^*$ .

- (1) 求  $a_3$  的值;
- (2) 求数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ ;
- (3) 令  $b_1 = a_1, b_n = \frac{T_{n-1}}{n} + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})a_n (n \geq 2)$ , 证明: 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  满足  $S_n < 2 + 2 \ln n$