

2016年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分.第 I 卷 1 至 3 页,第 II 卷 3 至 5 页.
2. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试题相应的位置.
3. 全部答案在答题卡上完成,答在本试题上无效.
4. 考试结束后,将本试题和答题卡一并交回.

第 I 卷

一. 选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

(1) 已知 $z = (m+3) + (m-1)i$ 在复平面内对应的点在第四象限, 则实数 m 的取值范围是

- (A) $(-3, 1)$ (B) $(-1, 3)$ (C) $(1, +\infty)$ (D) $(-\infty, -3)$

(2) 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x | (x+1)(x-2) < 0, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cup B =$

- (A) $\{1\}$ (B) $\{1, 2\}$ (C) $\{0, 1, 2, 3\}$ (D) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

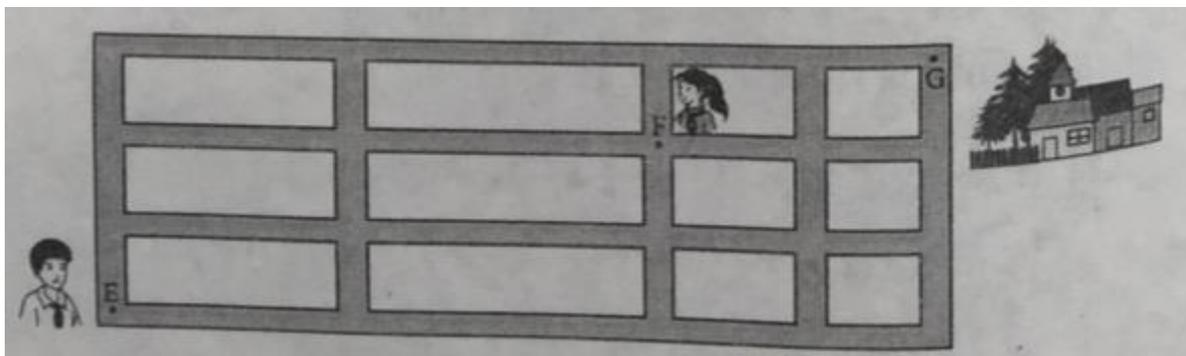
(3) 已知向量 $\mathbf{a} = (1, m)$, $\mathbf{b} = (3, -2)$, 且 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, 则 $m =$

- (A) -8 (B) -6 (C) 6 (D) 8

(4) 圆 $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$ 的圆心到直线 $ax + y - 1 = 0$ 的距离为 1, 则 $a =$

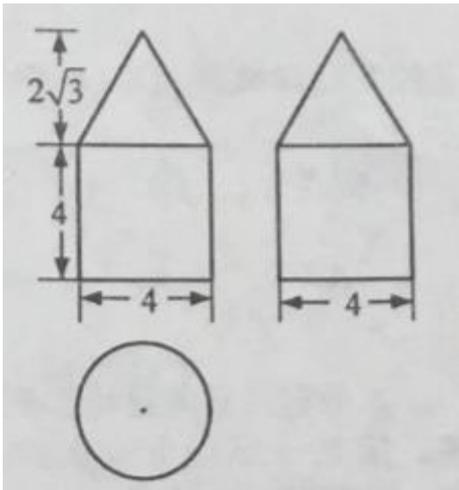
- (A) $-\frac{4}{3}$ (B) $-\frac{3}{4}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

(5) 如图, 小明从街道的 E 处出发, 先到 F 处与小红会合, 再一起到位于 G 处的老年公寓参加志愿者活动, 则小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为



- (A) 24 (B) 18 (C) 12 (D) 9

(6) 右图是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图, 则该几何体的表面积为

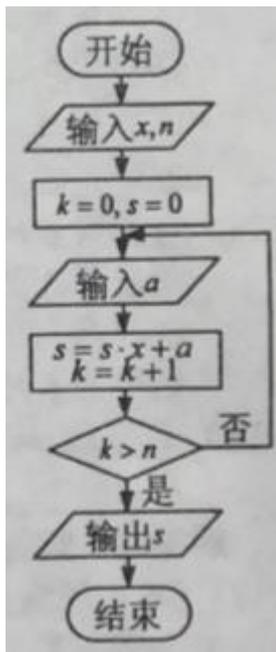


- (A) 20π (B) 24π (C) 28π (D) 32π

(7) 若将函数 $y=2\sin 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 则平移后图象的对称轴为

- (A) $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6} (k\in\mathbf{Z})$ (B) $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6} (k\in\mathbf{Z})$ (C) $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12} (k\in\mathbf{Z})$ (D) $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12} (k\in\mathbf{Z})$

(8) 中国古代有计算多项式值的秦九韶算法, 右图是实现该算法的程序框图. 执行该程序框图, 若输入的 $x=2, n=2$, 依次输入的 a 为 2, 2, 5, 则输出的 $s=$



- (A) 7 (B) 12 (C) 17 (D) 34

(9) 若 $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin 2\alpha =$

- (A) $\frac{7}{25}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $-\frac{1}{5}$ (D) $-\frac{7}{25}$

(10) 从区间 $[0,1]$ 随机抽取 $2n$ 个数 $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$, 构成 n 个数对 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 其中两数的平方和小于 1 的数对共有 m 个, 则用随机模拟的方法得到的圆周率 π 的近似值为

- (A) $\frac{4n}{m}$ (B) $\frac{2n}{m}$ (C) $\frac{4m}{n}$ (D) $\frac{2m}{n}$

(11) 已知 F_1, F_2 是双曲线 $E \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, 点 M 在 E 上, MF_2 与 x 轴垂直, $\sin \angle MF_2F_1 = \frac{1}{3}$,

则 E 的离心率为

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

(12) 已知函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x) = 2 - f(x)$, 若函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 与 $y = f(x)$ 图像的交

点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, 则 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) =$

- (A) 0 (B) m (C) $2m$ (D) $4m$

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分. 第(13)题~第(21)题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第(22)题~第(24)题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分

(13) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\cos A = \frac{4}{5}$, $\cos C = \frac{5}{13}$, $a=1$, 则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) α, β 是两个平面, m, n 是两条直线, 有下列四个命题:

- (1) 如果 $m \perp n, m \perp \alpha, n \parallel \beta$, 那么 $\alpha \perp \beta$.
- (2) 如果 $m \perp \alpha, n \parallel \alpha$, 那么 $m \perp n$.
- (3) 如果 $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha$, 那么 $m \parallel \beta$.
- (4) 如果 $m \parallel n, \alpha \parallel \beta$, 那么 m 与 α 所成的角和 n 与 β 所成的角相等.

其中正确的命题有 . (填写所有正确命题的编号)

(15) 有三张卡片, 分别写有 1 和 2, 1 和 3, 2 和 3. 甲, 乙, 丙三人各取走一张卡片, 甲看了乙的卡片后说: “我与乙的卡片上相同的数字不是 2”, 乙看了丙的卡片后说: “我与丙的卡片上相同的数字不是 1”, 丙说: “我的卡片上的数字之和不是 5”, 则甲的卡片上的数字是 .

(16) 若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\ln x+2$ 的切线, 也是曲线 $y=\ln(x+2)$ 的切线, 则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

三. 解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 12 分)

S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_n=1$, $S_7=28$. 记 $b_n=[\lg a_n]$ ，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[0.9]=0, [\lg 99]=1$.

(I) 求 b_1, b_{11}, b_{101} ;

(II) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 1 000 项和.

18. (本题满分 12 分)

某险种的基本保费为 a (单位：元)，继续购买该险种的投保人称为续保人，续保人的本年度的保费与其上年度的出险次数的关联如下：

上年度出险次数	0	1	2	3	4	≥ 5
保费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

设该险种一续保人一年内出险次数与相应概率如下：

一年内出险次数	0	1	2	3	4	≥ 5
概率	0.30	0.15	0.20	0.20	0.10	0.05

(I) 求一续保人本年度的保费高于基本保费的概率；

(II) 若一续保人本年度的保费高于基本保费，求其保费比基本保费高出 60% 的概率；

(III) 求续保人本年度的平均保费与基本保费的比值.

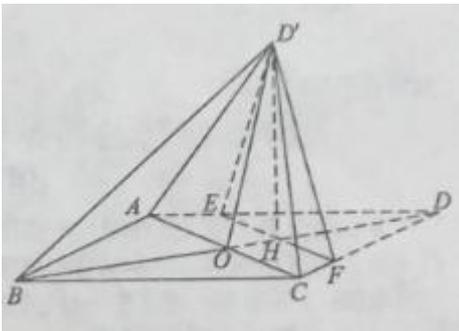
19. (本小题满分 12 分)

如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O ， $AB=5$ ， $AC=6$ ，点 E, F 分别在 AD, CD 上， $AE=CF=\frac{5}{4}$ ， EF

交 BD 于点 H . 将 $\triangle DEF$ 沿 EF 折到 $\triangle D'EF$ 的位置， $OD'=\sqrt{10}$.

(I) 证明： $D'H \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(II) 求二面角 $B-D'A-C$ 的正弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{t} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点在 x 轴上, A 是 E 的左顶点, 斜率为 $k(k>0)$ 的直线交 E 于 A, M 两点, 点 N 在 E 上, $MA \perp NA$.

(I) 当 $t=4$, $|AM|=|AN|$ 时, 求 $\triangle AMN$ 的面积;

(II) 当 $2|AM|=|AN|$ 时, 求 k 的取值范围.

(21) (本小题满分 12 分)

(I) 讨论函数 $f(x) = \frac{x-2}{x+2} e^x$ 的单调性, 并证明当 $x > 0$ 时, $(x-2)e^x + x + 2 > 0$;

(II) 证明: 当 $a \in [0, 1)$ 时, 函数 $g(x) = \frac{e^x - ax - a}{x^2} (x > 0)$ 有最小值. 设 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$, 求函数 $h(a)$

的值域.

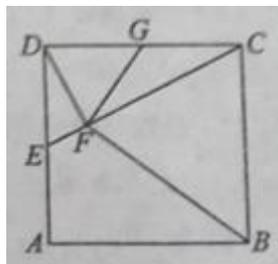
请考生在 22、23、24 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分, 作答时请写清题号

(22) (本小题满分 10 分) 选修 4-1: 集合证明选讲

如图, 在正方形 $ABCD$, E, G 分别在边 DA, DC 上 (不与端点重合), 且 $DE=DG$, 过 D 点作 $DF \perp CE$, 垂足为 F .

(I) 证明: B, C, E, F 四点共圆;

(II) 若 $AB=1$, E 为 DA 的中点, 求四边形 $BCGF$ 的面积.



(23) (本小题满分 10 分) 选修 4—4: 坐标系与参数方程

在直线坐标系 xOy 中, 圆 C 的方程为 $(x+6)^2 + y^2 = 25$.

(I) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求 C 的极坐标方程;

(II) 直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha, \end{cases}$ (t 为参数), l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB| = \sqrt{10}$, 求 l 的斜率.

(24) (本小题满分 10 分), 选修 4—5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x - \frac{1}{2}| + |x + \frac{1}{2}|$, M 为不等式 $f(x) < 2$ 的解集.

(I) 求 M ;

(II) 证明: 当 $a, b \in M$ 时, $|a+b| < |1+ab|$.

