一、选择题

1.D　由已知得 $B=\{x|-3<x<3\}$, ∵ $A=\{1,2,3\}$, ∴ $A\cap B=\{1,2\}$, 故选 D.

2.C　$z=3-2i$, 所以 $\overline{z}=3+2i$, 故选 C.

3.A　由题图可知 $A=2$, $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$, 则 $T=\pi$, 所以 $\omega=2$, 则 $y=2\sin(2x+\phi)$, 因为题图经过点 $\left(\frac{\pi}{3},2\right)$, 所以 $2\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=2$, 所以 $\frac{2\pi}{3}+\phi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$, 即 $\phi=2k\pi-\frac{\pi}{6}$, $k\in Z$, 当 $k=0$ 时, $\phi=-\frac{\pi}{6}$, 所以 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$, 故选 A.

4.A　设正方体的棱长为 a, 则 $a^3=8$, 解得 $a=2$.

设球的半径为 R, 则 $2R=\sqrt{3}a$, 即 $R=\sqrt{3}$, 所以球的表面积 $S=4\pi R^2=12\pi$. 故选 A.

5.D　由题意得点 P 的坐标为 (1,2). 把点 P 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 得 $k=1\times2=2$, 故选 D.

6.A　由圆的方程可知圆心为 (1,4). 由点到直线的距离公式可得 $\frac{|a\times1+4-1|}{\sqrt{a^2+1}}=1$, 解得 $a=-\frac{4}{3}$, 故选 A.

易错警示　圆心的坐标容易误写为 (-1,-4) 或 (2,8).

7.C　由三视图知圆锥的高为 $2\sqrt{3}$, 底面半径为 2, 则圆锥的母线长为 4, 所以圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2}\times4\pi\times4=8\pi$. 圆柱的底面积为 4π,

圆柱的侧面积为 $4\times4\pi=16\pi$, 从而该几何体的表面积为 $8\pi+16\pi+4\pi=28\pi$, 故选 C.

8.B　行人在红灯亮起的 25 秒内到达该路口, 即满足至少需要等待 15 秒才出现绿灯, 根据几何概型的概率公式知所求事件的概率 $P=\frac{25}{40}=\frac{5}{8}$, 故选 B.

9.C　执行程序框图, 输入 a 为 2 时, $s=0\times2+2=2$, $k=1$, 此时 $k>2$ 不成立; 再输入 a 为 2 时, $s=2\times2+2=6$, $k=2$, 此时 $k>2$ 不成立; 再输入 a 为 5, $s=6\times2+5=17$, $k=3$, 此时 $k>2$ 成立, 结束循环, 输出 s 为 17, 故选 C.

10.D　函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域、值域均为 $(0,+\infty)$, 而 $y=x$, $y=2^x$ 的定义域均为 R, 排除 A, C; $y=\lg x$ 的值域为 R, 排除 B, 故选 D.

易错警示　利用对数恒等式将函数 $y=10^{\lg x}$ 变为 $y=x$, 将其值域认为是 R 是失分的主要原因.

11. B　$f(x)=1-2\sin^2x+6\sin x=-2\left(\sin x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{2}$, 当 $\sin x=1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 5, 故选 B.

思路分析　利用二倍角余弦公式及诱导公式将 $f(x)=\cos 2x+6\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 转化为关于 $\sin x$ 的二次函数,通过配方来求最值,注意不要忘记 $\sin x\in[-1,1]$.

12. B　由题意可知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 而 $y=|x^2-2x-3|=|(x-1)^2-4|$ 的图象也关于直线 $x=1$ 对称, 所以两个图象的交点关于直线 $x=1$ 对称, 且每对关于直线 $x=1$ 对称的交点的横坐标之和为 2, 所以 $\sum_{i=1}^{m}x_i=m$, 故选 B.

疑难突破　关于直线 $x=1$ 对称的两点横坐标之和为 2,由题意得出 $f(x)$ 与 $y=|x^2-2x-3|$ 的图象均关于直线 $x=1$ 对称是解题的关键.

二、填空题

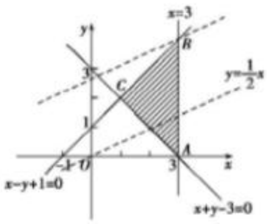
13. 答案　-6

解析　因为 a∥b, 所以 $\frac{m}{3}=\frac{4}{-2}$, 解得 $m=-6$.

易错警示　容易把两个向量平行与垂直的条件混淆.

14. 答案　-5

解析　由约束条件画出可行域, 如图中阴影部分所示(包括边界). 当直线 $x-2y-z=0$ 过点 $B(3,4)$ 时, z 取得最小值, $z_{min}=3-2\times4=-5$.



15. 答案　$\frac{21}{13}$

解析　由 $\cos C=\frac{5}{13}$, $0<C<\pi$, 得 $\sin C=\frac{12}{13}$.

由 $\cos A=\frac{4}{5}$, $0<A<\pi$, 得 $\sin A=\frac{3}{5}$.

所以 $\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)$

$=\sin A\cos C+\sin C\cos A=\frac{63}{65}$,

根据正弦定理得 b=$\frac{a\sin B}{\sin A}$=$\frac{21}{13}$.

16. 答案　1 和 3

解析　丙的卡片上的数字之和不是 5,则丙有两种情况:①丙的卡片上的数字为 1 和 2,此时乙的卡片上的数字为 2 和 3,甲的卡片上的数字为 1 和 3,满足题意;②丙的卡片上的数字为 1 和 3,此时乙的卡片上的数字为 2 和 3,甲的卡片上的数字为 1 和 2,这时甲与乙的卡片上有相同的数字 2,与已知矛盾,故情况②不符合,所以甲的卡片上的数字为 1 和 3.

疑难突破　先对丙分类讨论,确定出丙卡片上的数字情况再确定乙、甲是解决问题的关键.

三、解答题

17. 解析　(Ⅰ)设数列$\{a_n\}$的公差为 d,由题意有 $2a_1+5d=4$, $a_1+5d=3$.

解得 $a_1=1$, $d=\frac{2}{5}$. (3 分)

所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{2n+3}{5}$. (5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知, $b_n=\left[\frac{2n+3}{5}\right]$. (6 分)

当 n=1, 2, 3 时, $1\le\frac{2n+3}{5}<2$, $b_n=1$;

当 n=4, 5 时, $2\le\frac{2n+3}{5}<3$, $b_n=2$;

当 n=6, 7, 8 时, $3\le\frac{2n+3}{5}<4$, $b_n=3$;

当 n=9, 10 时, $4\le\frac{2n+3}{5}<5$, $b_n=4$. (10 分)

所以数列$\{b_n\}$的前 10 项和为 1×3+2×2+3×3+4×2=24. (12 分)

疑难突破　充分挖掘[x]的意义,进而将$\{b_n\}$的表达式类比分段函数给出,从而求出数列$\{b_n\}$的前 10 项和.

18. 解析　(Ⅰ)事件 A 发生当且仅当一年内出险次数小于 2.

由所给数据知,一年内出险次数小于 2 的频率为$\frac{60+50}{200}$=0.55,

故 P(A)的估计值为 0.55. (3 分)

(Ⅱ)事件 B 发生当且仅当一年内出险次数大于 1 且小于 4.

由所给数据知,一年内出险次数大于 1 且小于 4 的频率为$\frac{30+30}{200}$=0.3,

故 P(B)的估计值为 0.3. (6 分)

(III)由所给数据得

保费	0.85a	a	1.25a	1.5a	1.75a	2a
频率	0.30	0.25	0.15	0.15	0.10	0.05

(10 分)

调查的 200 名续保人的平均保费为

$0.85a\times0.30+a\times0.25+1.25a\times0.15+1.5a\times0.15+1.75a\times0.10+2a\times0.05=1.1925a$.

因此,续保人本年度平均保费的估计值为 $1.1925a$.(12 分)

19.解析 (Ⅰ)证明:由已知得 $AC\perp BD$, $AD=CD$.

又由 $AE=CF$ 得 $\frac{AE}{AD}=\frac{CF}{CD}$, 故 $AC\parallel EF$.(2 分)

由此得 $EF\perp HD$, $EF\perp HD'$, 所以 $AC\perp HD'$.(4 分)

(Ⅱ)由 $EF\parallel AC$ 得 $\frac{OH}{DO}=\frac{AE}{AD}=\frac{1}{4}$.(5 分)

由 $AB=5$, $AC=6$ 得 $DO=BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=4$.

所以 $OH=1$, $D'H=DH=3$.

于是 $OD'^2+OH^2=(2\sqrt{2})^2+1^2=9=D'H^2$, 故 $OD'\perp OH$.

由(Ⅰ)知 $AC\perp HD'$, 又 $AC\perp BD$, $BD\cap HD'=H$, 所以 $AC\perp$ 平面 BHD', 于是 $AC\perp OD'$.

又由 $OD'\perp OH$, $AC\cap OH=O$, 所以 $OD'\perp$ 平面 ABC.(8 分)

又由 $\frac{EF}{AC}=\frac{DH}{DO}$ 得 $EF=\frac{9}{2}$.

五边形 ABCFE 的面积 $S=\frac{1}{2}\times6\times8-\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}\times3=\frac{69}{4}$.(10 分)

所以五棱锥 $D'-ABCFE$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{69}{4}\times2\sqrt{2}=\frac{23\sqrt{2}}{2}$.(12 分)

20.解析 (Ⅰ)$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. 当 $a=4$ 时,

$f(x)=(x+1)\ln x-4(x-1)$, $f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}-3$, $f'(1)=-2$,

$f(1)=0$.

曲线 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $2x+y-2=0$.(3 分)

(Ⅱ)当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f(x)>0$ 等价于 $\ln x-\frac{a(x-1)}{x+1}>0$.(4 分)

设 $g(x)=\ln x-\frac{a(x-1)}{x+1}$, 则

$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2a}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2(1-a)x+1}{x(x+1)^2}$, $g(1)=0$.(6 分)

(i)当 $a\le2$, $x\in(1,+\infty)$ 时, $x^2+2(1-a)x+1\ge x^2-2x+1>0$, 故 $g'(x)>0$, $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增, 因此 $g(x)>0$;(8 分)

(ii)当 $a>2$ 时, 令 $g'(x)=0$ 得

$x_1=a-1-\sqrt{(a-1)^2-1}$, $x_2=a-1+\sqrt{(a-1)^2-1}$.(10 分)

由$x_2>1$和$x_1x_2=1$得$x_1<1$,故当$x\in(1,x_2)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$在$(1,x_2)$单调递减,因此$g(x)<0$.(11分)

综上,a的取值范围是$(-\infty,2]$.(12分)

21.解析　(Ⅰ)设$M(x_1,y_1)$,则由题意知$y_1>0$.

由已知及椭圆的对称性知,直线AM的倾斜角为$\frac{\pi}{4}$.

又$A(-2,0)$,因此直线AM的方程为$y=x+2$.(2分)

将$x=y-2$代入$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$得$7y^2-12y=0$.

解得$y=0$或$y=\frac{12}{7}$,所以$y_1=\frac{12}{7}$.

因此△AMN的面积$S_{\triangle AMN}=2\times\frac{1}{2}\times\frac{12}{7}\times\frac{12}{7}=\frac{144}{49}$.(4分)

(Ⅱ)将直线AM的方程$y=k(x+2)(k>0)$代入$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$得

$(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$.

由$x_1\cdot(-2)=\frac{16k^2-12}{3+4k^2}$得$x_1=\frac{2(3-4k^2)}{3+4k^2}$,

故$|AM|=|x_1+2|\sqrt{1+k^2}=\frac{12\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}$.

由题设,直线AN的方程为$y=-\frac{1}{k}(x+2)$,

故同理可得$|AN|=\frac{12k\sqrt{1+k^2}}{3k^2+4}$.(7分)

由$2|AM|=|AN|$得$\frac{2}{3+4k^2}=\frac{k}{3k^2+4}$,即$4k^3-6k^2+3k-8=0$.(9分)

设$f(t)=4t^3-6t^2+3t-8$,则k是$f(t)$的零点,$f'(t)=12t^2-12t+3=3(2t-1)^2\geq0$,所以$f(t)$在$(0,+\infty)$单调递增.

又$f(\sqrt{3})=15\sqrt{3}-26<0$,$f(2)=6>0$,因此$f(t)$在$(0,+\infty)$有唯一的零点,且零点k在$(\sqrt{3},2)$内,所以$\sqrt{3}<k<2$.(12分)

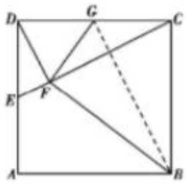
22.解析　(Ⅰ)证明:因为DF⊥EC,所以△DEF∽△CDF,则有∠GDF=∠DEF=∠FCB,

$\frac{DF}{CF}=\frac{DE}{CD}=\frac{DG}{CB}$,

所以△DGF∽△CBF,由此可得∠DGF=∠CBF.

因此∠CGF+∠CBF=180°,所以B,C,G,F四点共圆.(5分)

(Ⅱ)由B,C,G,F四点共圆,CG⊥CB知FG⊥FB,连结GB.



由 G 为 Rt△DFC 斜边 CD 的中点,知 GF=GC,

故 Rt△BCG≌Rt△BFG,

因此,四边形 BCGF 的面积 S 是△GCB 面积 $S_{\triangle GCB}$ 的 2 倍,即

$S=2S_{\triangle GCB}=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$.(10 分)

23. 解析 (Ⅰ)由 $x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$ 可得圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2+12\rho\cos\theta+11=0$.(3 分)

(Ⅱ)在(Ⅰ)中建立的极坐标系中,直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in R)$.

设 A,B 所对应的极径分别为 ρ_1,ρ_2,将 l 的极坐标方程代入 C 的极坐标方程得 $\rho^2+12\rho\cos\alpha+11=0$.(6 分)

于是 $\rho_1+\rho_2=-12\cos\alpha$,$\rho_1\rho_2=11$.

$|AB|=|\rho_1-\rho_2|=\sqrt{(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2}=\sqrt{144\cos^2\alpha-44}$.(8 分)

由 $|AB|=\sqrt{10}$ 得 $\cos^2\alpha=\frac{3}{8}$,$\tan\alpha=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$.(9 分)

所以 l 的斜率为 $\frac{\sqrt{15}}{3}$ 或 $-\frac{\sqrt{15}}{3}$.(10 分)

方法总结 利用整体运算的技巧可以大大提高解题效率.

24. 解析 (Ⅰ)$f(x)=\begin{cases}-2x, & x\le -\frac{1}{2},\\ 1, & -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2},\\ 2x, & x\ge\frac{1}{2}.\end{cases}$(2 分)

当 $x\le-\frac{1}{2}$ 时,由 $f(x)<2$ 得 $-2x<2$,解得 $x>-1$;(3 分)

当 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ 时,$f(x)<2$;(4 分)

当 $x\ge\frac{1}{2}$ 时,由 $f(x)<2$ 得 $2x<2$,解得 $x<1$,(5 分)

所以 $f(x)<2$ 的解集 $M=\{x|-1<x<1\}$.(6 分)

(Ⅱ)证明:由(Ⅰ)知,当 $a,b\in M$ 时,$-1<a<1$,$-1<b<1$,

从而 $(a+b)^2-(1+ab)^2=a^2+b^2-a^2b^2-1=(a^2-1)(1-b^2)<0$,

因此 $|a+b|<|1+ab|$.(10 分)