# 2015年普通高等学校招生全国考试
# 数学（文）（北京卷）参考答案

**一、选择题（共8小题，每小题5分，共40分）**

| | | | |
|---|---|---|---|
| （1）A | （2）D | （3）B | （4）C |
| （5）B | （6）A | （7）C | （8）B |

二、填空题（共6小题，每小题5分，共30分）

（9）—1　　（10）$\log_2 5$

（11）$\dfrac{\pi}{4}$　　（12）$\sqrt{3}$

（13）7　　（14）乙　　数学

三、解答题（共6小题，共80分）

（15）（共13分）

解：（I）因为 $f\left(x\right)=\sin x+\sqrt{3}\cos x-\sqrt{3}$

$$=2\sin(x+\frac{\pi}{3})-\sqrt{3}$$

所以 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 $2\pi$.

（II）因为 $0\le x\le\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $\dfrac{\pi}{3}\le x+\dfrac{\pi}{3}\le\pi$.

当 $x+\dfrac{\pi}{3}=\pi$，即 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 时，$f\left(x\right)$ 取得最小值.

所以 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上的最小值为 $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

（16）（共13分）

解：（I）设等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的公差为 $d$.

因为 $a_4-a_3=2$，所以 $d=2$.

又因为 $a_1+a_2=10$，所以 $2a_1+d=10$，故 $a_1=4$.

所以 $a_n=4+2(n-1)=2n+2(n=1,2,\cdots)$.

（II）设等比数列 $\left\{b_n\right\}$ 的公比为 q.

因为 $b_2=a_3=8$，$b_3=a_7=16$，

所以 $q=2$，$b_1=4$.

所以 $b_6=4\times2^{6-1}=128$.

由 128=$2n+2$ 得 $n=63$.

所以 $b_6$ 与数列 $\left\{a_n\right\}$ 的第63项相等.

（17）（共13分）

解：（I）从统计表可以看出，在这1000位顾客中有200位顾客同时购买了乙和丙，

所以顾客同时购买乙和丙的概率可以估计为 $\dfrac{200}{1000}=0.2$.

（II）从统计表可以看出，在这1000位顾客中，有100位顾客同时购买了甲、丙、丁，另有200位顾客同时购买了甲、乙、丙，其他顾客最多购买了2种商品，

所以顾客在甲、乙、丙、丁中同时购买3种商品的概率可以估计为

$$\frac{100+200}{1000}=0.3.$$

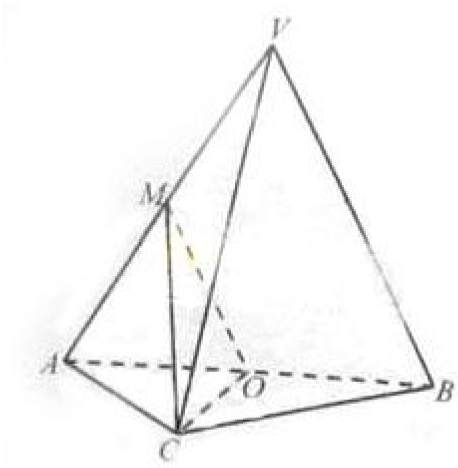
（III）与（I）同理，可得：

顾客同时购买甲和乙的概率可以估计为$\frac{200}{1000}=0.2$，

顾客同时购买甲和丙的概率可以估计为$\frac{100+200+300}{1000}=0.6$，

顾客同时购买甲和丁的概率可以估计为$\frac{100}{1000}=0.1$.

所以,如果顾客购买了甲,则该顾客同时购买丙的可能性最大。




（18）（共 14 分）

解：（I）因为 O,M 分别为 AB，ＶＡ的中点，

所以ＯＭ//ＶＢ.

又因为ＶＢ$\not\subset$平面 MOC，

所以 VB//平面 MOC.

（II）因为ＡＣ＝ＢＣ，Ｏ为 AB 的中点，

所以 OC⊥AB.

又因为平面$VAB\perp$平面$ABC$，且$OC\subset$平面$ABC$，

所以$OC\perp$平面$VAB$.

所以平面$MOC\perp$平面$VAB$.

（III）在等腰直角三角形$ACB$中，$AC=BC=\sqrt{2}$，

所以$AB=2$，$OC=1$.

所以等边三角形$VAB$的面积$S_{\Delta VAB}=\sqrt{3}$.

又因为$OC\perp$平面$VAB$，

所以三棱锥$C-VAB$的体积等于$\frac{1}{3}OC\cdot S_{\Delta VAB}=\sqrt{\frac{3}{3}}$.

又因为三棱锥$V-ABC$的体积与三棱锥$C-VAB$的体积相等，

所以三棱锥$V-ABC$的体积为$\sqrt{\frac{3}{3}}$.

（１９）（共１３分）

解：（Ⅰ）由 $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{2}-kInx$ （k>0）得

$$f(x)=x-\frac{k}{x}=\frac{x^2-k}{x}.$$

由 $f^{'}(x)$=0 解得 $x=\sqrt{k}$.

$f(x)$ 与 $f^{'}(x)$ 在区间（$0,+\infty$）上的情况如下：

| $x$ | $(0,\sqrt{k})$ | $\sqrt{k}$ | $(\sqrt{k},+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f^{'}(x)$ | — | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | $\dfrac{k(1-1nk)}{2}$ | ↗ |

所以，$f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,\sqrt{k})$，单调递增区间是 $(\sqrt{k},+\infty)$；

$f(x)$ 在 $x=\sqrt{k}$ 处取得极小值 $f(\sqrt{k})=\dfrac{k(1-1nk)}{2}$.

（II）由（I）知，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的最小值 $f(\sqrt{k})=\dfrac{k(1-1nk)}{2}$.

因为 $f(x)$ 存在零点，所以 $\dfrac{k(1-1nk)}{2}\leq 0$，从而 $k\geq e$.

当 $k=e$ 时，$f(x)$ 在区间 上单调递减，且 $f(\sqrt{e})=0$，

所以 $x=\sqrt{e}$ 是 $f(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{e})$ 上的唯一零点.

当 $k$ >e 时，$f(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{e})$ 上单调递减，且 $f(I)=\dfrac{1}{2}>0,\ f(\sqrt{e})=\dfrac{e-k}{2}<0,$

所以 $f(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

综上可知，若 $f(x)$ 存在零点，则 $f(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

（20）（共 14 分）

解：（I）椭圆 $C$ 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$.

所以 $a=\sqrt{3}, b=1, c=\sqrt{2}$ .

所以椭圆 $C$ 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

（II）因为 $AB$ 过点 $D(1,0)$ 且垂直于 $x$ 轴，所以可设 $A(1,y_1), B(1,y_1)$ ，

直线 $AE$ 的方程 $y-1=(1-y_1)(x-2)$ .

令 $x=3$ ，得 $M(3,2-y_1)$ .

所以直线 $BM$ 的斜率 $k_{BM}=\frac{2-y_1+y_1}{3-1}=1$ .

（III）直线 $BM$ 与直线 $DE$ 平行.证明如下：

当直线 $AB$ 的斜率不存在时，由（II）可知 $k_{BM}=1$.

又因为直线 $DE$ 的斜率 $k_{DE}=\frac{1-0}{2-1}=1$ ，所以 $BM \parallel DE$ .

当直线 $AB$ 的斜率存在时，设其方程为 $y=k(x-1)(k\neq 1)$ ，

设 $A(x_1,y_2), B(x_2,y_2)$, 则直线 $AE$ 的方程为 $y-1=\frac{y_1-1}{x_1-2}(x-2)$.

令 $x=3$ ，得点 $M(3,\frac{y_1+x_1-3}{x\ \ -2})$ .

由 $\begin{cases} x^2+3y^2=3, \\ y=k(x-1) \end{cases}$ 得 $(1+3k^2)x^2-6k^2x+3k^2-3=0$.

所以 $x_1+x_2=\frac{6k^2}{1+3k^2}, x_1x_2=\frac{3k^2-3}{1+3k^2}$.

直线 $BM$ 的斜率 $k_{BM}=\frac{\frac{y_1+x_1-3}{x_1-2}-y_2}{3-x_2}$.

因为 $k_{BM}-1=\frac{k(x_1-1)+x_1-3-k(x_2-1)(x_1-2)-(3-x_2)(x_1-2)}{(3-x_2)(x_1-2)}$

$$=\frac{(k-1)\left[-x_1x_2+2(x_1+x_2)-3\right]}{(3-x_2)(x_1-2)}$$

$$=\frac{(k-1)(\frac{-3k^2+3}{1+3k^2}+\frac{12k^2}{1+3k^2}-3)}{(3-x_2)(x_1-2)}$$

$=0$ ，

所以， $k_{BM}=1=k_{DE}$.

所以 $BM \parallel DE$ .

综上可知，直线 $BM$ 与直线 $DE$ 平行.