# 2016 年普通高等学校招生全国统一考试(全国 I 卷)

# 理科数学(参考答案)

1．D【解析】

试题分析：集合$A=\{x|(x-1)(x-3)<0\}=\{x|1<x<3\}$，集合 $B=\left\{x\middle|x>\frac{3}{2}\right\}$，所以$A\cap B=\{x|\frac{3}{2}<x<3\}$,故选 D.

2．B【解析】

试题分析：因为$(1+\mathrm{i})x=1+y\mathrm{i}$, 所以 $x+x\mathrm{i}=1+y\mathrm{i}$,所以$x=1,y=x=1$,故$|x+y\mathrm{i}|=|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$, 故选 B.

3．C【解析】

试题分析：由已知，$\begin{cases}9a_1+36d=27\\ a_1+9d=8\end{cases}$,所以$a_1=-1,d=1,a_{100}=a_1+99d=-1+99=98$,故选 C.

4．B【解析】

试题分析：由题意，这是几何概型问题，班车每 30 分钟发出一辆，到达发车站的时间总长度为 40，等车不超过 10 分钟的时间长度为 20，故所求概率为$\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$，选 B.

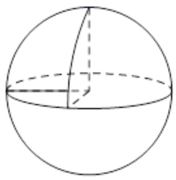
5．A【解析】

由题意知：双曲线的焦点在$x$轴上，所以$m^2+n+3m^2-n=4$，解得$m^2=1$，因为方程$\frac{x^2}{1+n}-\frac{y^2}{3-n}=1$表示双曲线，所以$\begin{cases}1+n>0\\3-n>0\end{cases}$，解得$\begin{cases}n>-1\\n<3\end{cases}$，所以$n$的取值范围是$(-1,3)$，故选 A.

6．A

【解析】

试题分析：由三视图知，该几何体的直观图如图所示：



是一个球被切掉左上角的$\frac{1}{8}$,即该几何体是$\frac{7}{8}$个球，设球的半径为R，则$V=\frac{7}{8}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{28\pi}{3}$，解得$R=2$，所以它的表面积是$\frac{7}{8}$的球面面积和三个扇形面积之和,即$\frac{7}{8}\times4\pi\times2^2+\frac{3}{4}\times\pi\times2^2=17\pi$，故选 A.

7．D

【详解】

试题分析：函数 $f(x)=2x^2-e^{|x|}$在$[-2,2]$上是偶函数，其图象关于 $y$ 轴对称，

因为 $f(2)=8-\mathrm{e}^2,0<8-\mathrm{e}^2<1$，所以排除 $A,B$ 选项；

当 $x\in[0,2]$时， $y'=4x-e^x$ 有一零点，设为 $x_0$， 当 $x\in(0,x_0)$ 时， $f(x)$ 为减函数，

当 $x\in(x_0,2)$ 时， $f(x)$ 为增函数．故选：D.

8．C【详解】

试题分析：用特殊值法，令$a=3$，$b=2$，$c=\frac{1}{2}$得$3^{\frac{1}{2}}>2^{\frac{1}{2}}$，选项 A 错误，$3\times2^{\frac{1}{2}}>2\times3^{\frac{1}{2}}$，选项 B 错误，$\log_3\frac{1}{2}>\log_2\frac{1}{2}$，选项 D 错误，

因为$a\log_b c-b\log_a c=\lg c\cdot\left(\frac{a}{\lg b}-\frac{b}{\lg a}\right)=\lg c\cdot\left(\frac{\lg a^a-\lg b^b}{\lg b\lg a}\right),\because a>b>1\therefore 1<b^b<a^b<a^a\ \therefore\frac{\lg a^a-\lg b^b}{\lg b\lg a}>0\because 0<c<1\therefore\lg c<0\therefore a\log_b c<b\log_a c$选项 C 正确，故选 C.

9．C【详解】

当$x=0,y=1,n=1$时，$x=0+\frac{1-1}{2},y=1\times1=1$，不满足$x^2+y^2\geq36$；

$n=2,x=0+\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2},y=2\times1=2$，不满足$x^2+y^2\geq36$；

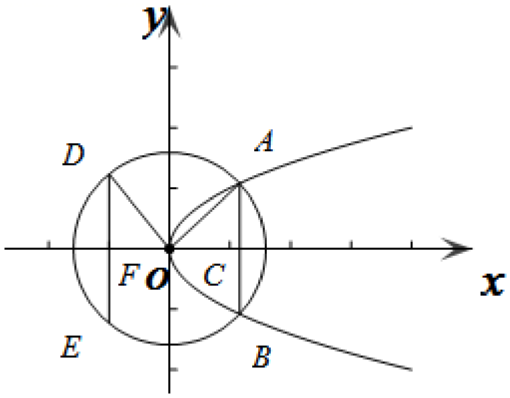
$n=3,x=\frac{1}{2}+\frac{3-1}{2}=\frac{3}{2},y=2\times3=6$，满足$x^2+y^2\geq36$；输出$x=\frac{3}{2},y=6$，则输出的$x,y$的值满足$y=4x$.

故选：C.

10．C【解析】

试题分析：如图，设抛物线方程为$y^2=2px$，$AB,DE$交$x$轴于$C,F$点，则$AC=2\sqrt{2}$，即$A$点纵坐标为$2\sqrt{2}$，则$A$点横坐标为$\frac{4}{p}$，即$OC=\frac{4}{p}$，由勾股定理知$DF^2+OF^2=DO^2=r^2$，$AC^2+OC^2=AO^2=r^2$，即$(\sqrt{5})^2+(\frac{p}{2})^2=(2\sqrt{2})^2+(\frac{4}{p})^2$，解得$p=4$，即$C$的焦点到准线的距离为 4，故选 B.

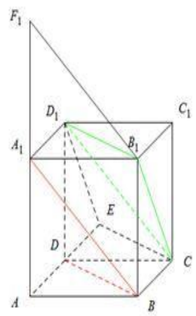
考点：抛物线的性质.




11．A

【解析】

试题分析：如图，设平面$CB_1D_1$ ∩平面$ABCD$=$m'$，平面$CB_1D_1$ ∩平面$ABB_1A_1$=$n'$，因为$\alpha//$平面$CB_1D_1$，所以$m//m',n//n'$，则$m,n$所成的角等于$m',n'$所成的角.延长$AD$，过$D_1$作$D_1E\parallel B_1C$，连接$CE,B_1D_1$，则$CE$为$m'$，同理$B_1F_1$为$n'$，而$BD\parallel CE,B_1F_1\parallel A_1B$，则$m',n'$所成的角即为$A_1B,BD$所成的角，即为60°，故$m,n$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，选 A.




12．B

【详解】

$\because x=-\frac{\pi}{4}$为$f(x)$的零点，$x=\frac{\pi}{4}$为$y=f(x)$图象的对称轴，

$\therefore\frac{2n+1}{4}\cdot T=\frac{\pi}{2}$，即$\frac{2n+1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$，（$n\in N$） 即 $\omega=2n+1$，（$n\in N$） 即 ω 为正奇数，

∵$f(x)$ 在（$\frac{\pi}{18}$，$\frac{5\pi}{36}$）上单调，则 $\frac{5\pi}{36}-\frac{\pi}{18}=\frac{\pi}{12}\le\frac{T}{2}$，　即 $T=\frac{2\pi}{\omega}\ge\frac{\pi}{6}$，解得：ω≤12，

当 ω=11 时，$-\frac{11\pi}{4}+\varphi=k\pi$，$k\in Z$，　∵$|\varphi|\le\frac{\pi}{2}$，　∴$\varphi=-\frac{\pi}{4}$，

此时 $f(x)$ 在（$\frac{\pi}{18}$，$\frac{5\pi}{36}$）不单调，不满足题意；当 ω=9 时，$-\frac{9\pi}{4}+\varphi=k\pi$，$k\in Z$，

∵$|\varphi|\le\frac{\pi}{2}$，∴$\varphi=\frac{\pi}{4}$，此时 $f(x)$ 在（$\frac{\pi}{18}$，$\frac{5\pi}{36}$）单调，满足题意；故 ω 的最大值为 9，

故选 $B$．

13．-2【解析】

试题分析：由题意得$(m+1)^2+3^2=m^2+1+5\Rightarrow m=-2$.　考点：向量的模

14．10【解析】

试题分析：$(2x+\sqrt{x})^5$的展开式的通项为$C_5^r(2x)^{5-r}(\sqrt{x})^r=2^{5-r}C_5^r x^{5-\frac{r}{2}}(r=0，1，2，\ldots，5)$，令$5-\frac{r}{2}=3$得$r=4$，所以$x^3$的系数是$2C_5^4=10$.

15．64【解析】

试题分析：设等比数列的公比为$q$，由$\begin{cases}a_1+a_3=10\\a_2+a_4=5\end{cases}$得，$\begin{cases}a_1(1+q^2)=10\\a_1q(1+q^2)=5\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=8\\q=\frac{1}{2}\end{cases}$.所以$a_1a_2\cdots a_n=a_1^nq^{1+2+\cdots+(n-1)}=8^n\times(\frac{1}{2})^{\frac{n(n-1)}{2}}=2^{-\frac{1}{2}n^2+\frac{7}{2}n}$，于是当$n=3$或$4$时，$a_1a_2\cdots a_n$取得最大值$2^6=64$.

考点：等比数列及其应用

16．216000 【解析】

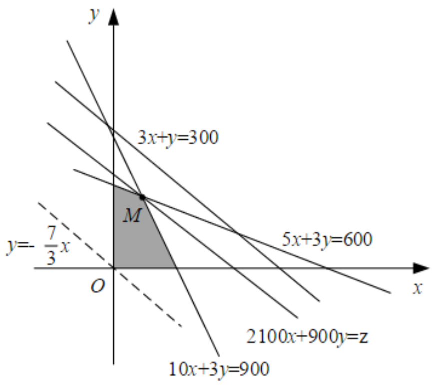
试题分析：设生产产品 $A$ 和产品 $B$ 的件数分别为 $x,y$ 件，利润之和为 $z$ 元，则根据题意可得

$\begin{cases}1.5x+0.5y\le150\\x+0.3\le90\\5x+3y\le600\\x\ge0\\y\ge0\end{cases}$，整理得$\begin{cases}3x+y\le300\\10x+3y\le900\\5x+3y\le600\\x\ge0\\y\ge0\end{cases}$，如图所示，阴影部分为可行域，目标函数为

$z=2100x+900y$，目标函数 $z$ 表示直线 $y=-\frac{7}{3}x+\frac{z}{900}$ 的纵轴截距的 900 倍，由图可知，当直线

$y=-\frac{7}{3}x+\frac{z}{900}$经过点 $M$ 时，$z$ 取得最大值。联立方程$\begin{cases}10x+3y=900\\5x+3y=600\end{cases}$，解得 $M(60,100)$，所以当

$x=60,y=100$时，目标函数取得最大值，$z_{\max}=2100\times60+900\times100=216000$.故本题正确答案为$216000$.




17．（1）$C=\frac{\pi}{3}$（2）$5+\sqrt{7}$

【详解】

试题分析：（1）根据正弦定理把$2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$化成$2\cos C(\sin A\cos B+\sin B\cos A)=\sin C$，利用和角公式可得$\cos C=\frac{1}{2}$,从而求得角$C$；（2）根据三角形的面积和角$C$的值求得$ab=6$，由余弦定理求得边$a$得到$\Delta ABC$的周长.

试题解析：（1）由已知可得$2\cos C(\sin A\cos B+\sin B\cos A)=\sin C$

$$\therefore 2\cos C\sin(A+B)=\sin C\Rightarrow\cos C=\frac{1}{2}\Rightarrow C=\frac{\pi}{3}$$

（2）$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C\Rightarrow\frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow ab=6$

又$\because a^2+b^2-2ab\cos C=c^2$

$\therefore a^2+b^2=13$，$\therefore(a+b)^2=25\Rightarrow a+b=5$

$\therefore\Delta ABC$的周长为$5+\sqrt{7}$

考点：正余弦定理解三角形.

18.（1）见解析；（2）$-\frac{2\sqrt{19}}{19}$.

【解析】

试题分析：(I) 证明$AF\perp$平面$EFDC$，结合$AF\subset$平面$ABEF$，可得平面$ABEF\perp$平面$EFDC$.（II）建立空间坐标系，利用向量求解.

试题解析：(I) 由已知可得$AF\perp DF$，$AF\perp FE$，所以$AF\perp$平面$EFDC$.

又$AF\subset$平面$ABEF$，故平面$ABEF\perp$平面$EFDC$.

(II) 过$D$作$DG\perp EF$，垂足为$G$，由（I）知$DG\perp$平面$ABEF$.

以$G$为坐标原点，$\overrightarrow{GF}$的方向为$x$轴正方向，$|\overrightarrow{GF}|$为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系$G-xyz$.

由（I）知$\angle DFE$为二面角$D-AF-E$的平面角，故$\angle DFE=60^\circ$，则$|DF|=2$，$|DG|=3$，可得$A(1,4,0)$，$B(-3,4,0)$，$E(-3,0,0)$，$D(0,0,\sqrt{3})$.

由已知，$AB//EF$，所以$AB//$平面$EFDC$.

又平面$ABCD\cap$平面$EFDC=DC$，故$AB//CD$，$CD//EF$.

由$BE//AF$，可得$BE\perp$平面$EFDC$，所以$\angle CEF$为二面角$C-BE-F$的平面角，

$\angle CEF=60^\circ$. 从而可得$C(-2,0,\sqrt{3})$.

所以$\overrightarrow{EC}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EB}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-3,-4,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(-4,0,0)$.

设$n=(x,y,z)$是平面$BCE$的法向量，则

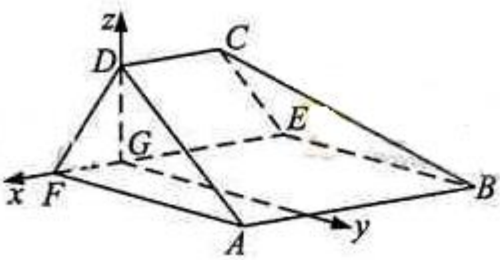
$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{EC}=0\\ n\cdot\overrightarrow{EB}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0\\ 4y=0\end{cases}$，

所以可取$n=(3,0,-\sqrt{3})$.

设$m$是平面$ABCD$的法向量，则$\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ m\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$，

同理可取$m=(0,\sqrt{3},4)$. 则$\cos\langle n,m\rangle=\frac{n\cdot m}{|n||m|}=-\frac{2\sqrt{19}}{19}$.

故二面角 E−BC−A 的余弦值为$-\frac{2\sqrt{19}}{19}$.



19．（1）见解析．（2）见解析．（3）见解析．

【详解】

（1）由柱状图并以频率代替概率可得，一台机器在三年内需更换的易损零件数为 8，9，10，11 的概率分别为 0．2，0．4，0．2，0．2，从而

$P(X=16)=0.2\times0.2=0.04$；

$P(X=17)=2\times0.2\times0.4=0.16$；

$P(X=18)=2\times0.2\times0.2+0.4\times0.4=0.24$；

$P(X=19)=2\times0.2\times0.2+2\times0.4\times0.2=0.24$；

$P(X=20)=2\times0.2\times0.4+0.2\times0.2=0.2$；

$P(X=21)=2\times0.2\times0.2=0.08$；

$P(X=22)=0.2\times0.2=0.04$．

所以 $X$ 的分布列为

| $X$ | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.04 | 0.16 | 0.24 | 0.24 | 0.2 | 0.08 | 0.04 |

（2）由（1）知 $P(X\le18)=0.44$，$P(X\le19)=0.68$，故 $n$ 的最小值为 19．

（3）购买零件所用费用含两部分，一部分为购买零件的费用，另一部分为备件不足时额外购买的费用．

当 n=19 时，费用的期望为：19×200+500×0.2+1000×0.08+1500×0.04=4040；

当 n=20 时，费用的期望为：20×200+500×0.08+1000×0.04=4080.

可知当 $n=19$ 时所需费用的期望值小于 $n=20$ 时所需费用的期望值，故应选 $n=19$．

考点：离散型随机变量及其分布列

20．（Ⅰ）答案见解析；（Ⅱ）$[12,8\sqrt{3})$.

【解析】

试题分析：（I）利用椭圆定义求方程；（II）把面积表示为关于斜率 k 的函数，再求最值。

试题解析：（I）因为 $|AD|=|AC|$，$EB\,//\,AC$，故 $\angle EBD=\angle ACD=\angle ADC$，

所以 $|EB|=|ED|$，故 $|EA|+|EB|=|EA|+|ED|=|AD|$．

又圆 $A$ 的标准方程为 $(x+1)^2+y^2=16$，从而 $|AD|=4$，所以 $|EA|+|EB|=4$．

由题设得 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$|AB|=2$，由椭圆定义可得点 $E$ 的轨迹方程为：

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$（$y\neq0$）．

（II）当 $l$ 与 $x$ 轴不垂直时，设 $l$ 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$．

由$\begin{cases} y=k(x-1) \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$得$(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$.

则$x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}$.

所以$|MN|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\dfrac{12(k^2+1)}{4k^2+3}$.

过点$B(1,0)$且与$l$垂直的直线$m$：$y=-\dfrac{1}{k}(x-1)$，$A$到$m$的距离为$\dfrac{2}{\sqrt{k^2+1}}$，所以

$|PQ|=2\sqrt{4^2-(\dfrac{2}{\sqrt{k^2+1}})^2}=4\sqrt{\dfrac{4k^2+3}{k^2+1}}$.故四边形$MPNQ$的面积

$S=\dfrac{1}{2}|MN||PQ|=12\sqrt{1+\dfrac{1}{4k^2+3}}$.

可得当$l$与$x$轴不垂直时，四边形$MPNQ$面积的取值范围为$[12,8\sqrt{3})$.

当$l$与$x$轴垂直时，其方程为$x=1$，$|MN|=3$，$|PQ|=8$，四边形$MPNQ$的面积为 12.

综上，四边形$MPNQ$面积的取值范围为$[12,8\sqrt{3})$.

21.（I）$(0,+\infty)$；（II）见解析

【解析】

试题分析：（I）求导，根据导函数的符号来确定（主要要根据导函数零点来分类）；（II）借助（I）的结论来证明，由单调性可知$x_1+x_2<2$等价于$f(x_1)>f(2-x_2)$，即$f(2-x_2)<0$．设$g(x)=-xe^{2-x}-(x-2)e^x$，则$g'(x)=(x-1)(e^{2-x}-e^x)$．则当$x>1$时，$g'(x)<0$，而$g(1)=0$，故当$x>1$时，$g(x)<0$．从而$g(x_2)=f(2-x_2)<0$，故$x_1+x_2<2$．

试题解析：（I）$f'(x)=(x-1)e^x+2a(x-1)=(x-1)(e^x+2a)$．

（I）设$a=0$，则$f(x)=(x-2)e^x$，$f(x)$只有一个零点．

（II）设$a>0$，则当$x\in(-\infty,1)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$．所以$f(x)$在$(-\infty,1)$单调递减，在$(1,+\infty)$单调递增．

又$f(1)=-e$，$f(2)=a$，取$b$满足$b<0$且$b<\ln\frac{a}{2}$，则

$f(b)>\frac{a}{2}(b-2)+a(b-1)^2=a(b^2-\frac{3}{2}b)>0$，

故$f(x)$存在两个零点．

（III）设$a<0$，由$f'(x)=0$得$x=1$或$x=\ln(-2a)$．

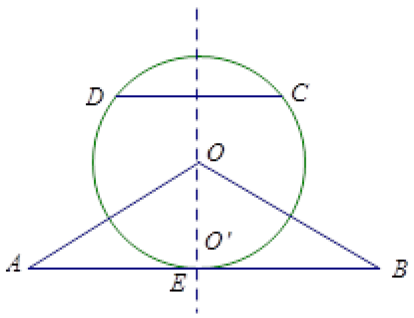
若$a\geq-\frac{e}{2}$，则$\ln(-2a)\leq1$，故当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，因此$f(x)$在$(1,+\infty)$单调递增．又当$x\leq1$时$f(x)<0$，所以$f(x)$不存在两个零点．

若$a<-\frac{e}{2}$，则$\ln(-2a)>1$，故当$x\in(1,\ln(-2a))$时，$f'(x)<0$；当$x\in(\ln(-2a),+\infty)$时，$f'(x)>0$．因此$f(x)$在$(1,\ln(-2a))$单调递减，在$(\ln(-2a),+\infty)$单调递增．又当$x\leq1$时，$f(x)<0$，所以$f(x)$不存在两个零点．

综上，$a$的取值范围为$(0,+\infty)$．

（II）不妨设$x_1<x_2$，由（I）知$x_1\in(-\infty,1),x_2\in(1,+\infty)$，$2-x_2\in(-\infty,1)$，$f(x)$在$(-\infty,1)$单调递减，所以$x_1+x_2<2$等价于$f(x_1)>f(2-x_2)$，即$f(2-x_2)<0$.
由于$f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}+a(x_2-1)^2$，而$f(x_2)=(x_2-2)e^{x_2}+a(x_2-1)^2=0$，所以
$f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}-(x_2-2)e^{x_2}$.
设$g(x)=-xe^{2-x}-(x-2)e^x$，则$g'(x)=(x-1)(e^{2-x}-e^x)$.
所以当$x>1$时，$g'(x)<0$，而$g(1)=0$，故当$x>1$时，$g(x)<0$.
从而$g(x_2)=f(2-x_2)<0$，故$x_1+x_2<2$.

22．（I）见解析；（II）见解析.
【解析】
试题分析：（I）设$E$是$AB$的中点，证明$\angle AOE=60°$；（II） 设$O'$是$A,B,C,D$四点所在圆的圆心，作直线$OO'$，证明$OO'\perp AB$，$OO'\perp CD$．由此可证明$AB//CD$．
试题解析：（I）设$E$是$AB$的中点，连结$OE$，
因为$OA=OB,\angle AOB=120°$，所以$OE\perp AB$，$\angle AOE=60°$.
在$Rt\triangle AOE$中，$OE=\frac{1}{2}AO$，即$O$到直线$AB$的距离等于$\odot O$的半径，所以直线$AB$与$\odot O$相切．




（II）因为$OA=2OD$，所以$O$不是$A,B,C,D$四点所在圆的圆心，设$O'$是$A,B,C,D$四点所在圆的圆心，作直线$OO'$.
由已知得$O$在线段$AB$的垂直平分线上，又$O'$在线段$AB$的垂直平分线上，所以$OO'\perp AB$.
同理可证，$OO'\perp CD$．所以$AB//CD$.

23．（Ⅰ）圆，$\rho^2-2\rho\sin\theta+1-a^2=0$（Ⅱ）1
【详解】
试题分析：（Ⅰ）把$\begin{cases}x=a\cos t\\y=1+a\sin t\end{cases}$化为普通方程，再化为极坐标方程；（Ⅱ）通过解方程组可以求得.

试题解析：（Ⅰ）消去参数$t$得到$C_1$的普通方程$x^2+(y-1)^2=a^2$.

$C_1$是以$(0,1)$为圆心，$a$为半径的圆.

将$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$代入$C_1$的普通方程中，得到$C_1$的极坐标方程为$\rho^2-2\rho\sin\theta+1-a^2=0$.

（Ⅱ）曲线$C_1,C_2$的公共点的极坐标满足方程组$\begin{cases}\rho^2-2\rho\sin\theta+1-a^2=0,\\ \rho=4\cos\theta,\end{cases}$

若$\rho\neq0$，由方程组得$16\cos^2\theta-8\sin\theta\cos\theta+1-a^2=0$，由已知$\tan\theta=2$，

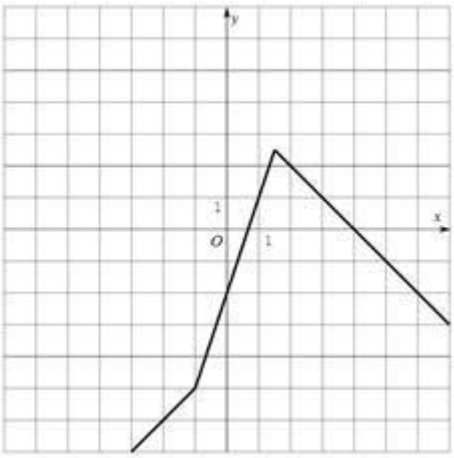
可得$16\cos^2\theta-8\sin\theta\cos\theta=0$，从而$1-a^2=0$，解得$a=-1$（舍去），$a=1$.

$a=1$时，极点也为$C_1,C_2$的公共点，在$C_3$上.所以$a=1$.

24.（I）见解析（II）$(-\infty,\ \frac{1}{3})\cup(1,\ 3)\cup(5,\ +\infty)$

【解析】试题分析：（I）化为分段函数作图；（II）用零点分区间法求解

试题解析：（I）$f(x)=\begin{cases} x-4, x\le -1, \\ 3x-2, -1<x\le \frac{3}{2}, \\ -x+4, x>\frac{3}{2}. \end{cases}$ $y=f(x)$的图像如图所示.




（II）由$f(x)$的表达式及图像，当$f(x)=1$时，可得$x=1$或$x=3$；

当$f(x)=-1$时，可得$x=\frac{1}{3}$或$x=5$，故$f(x)>1$的解集为$\{x|1<x<3\}$；$f(x)<-1$的解集为

$\left\{x\middle|x<\frac{1}{3}或x>5\right\}$，所以$|f(x)|>1$的解集为$\left\{x\middle|x<\frac{1}{3}或1<x<3或x>5\right\}$.