答案

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

（1）A (2)D（3）B（4）B（5）C（6）C（7）C（8）D

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（9）40　（10）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　（11）1　（12）1　（13）$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{6}$　（14）1，$\frac{1}{2}\le a<1$ 或$a\ge 2$

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

（15）（共13分）

解：(I) 因为 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\cos x)$

$=\sin(x+\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{2}$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为2π

（Ⅱ）因为$-\pi\le x\le 0$，所以$-\frac{3\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}$

当 $x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$，即 $x=-\frac{3}{4}\pi$ 时，$f(x)$ 取得最小值。

所以 $f(x)$ 在区间$\left[-\pi,0\right]$上的最小值为 $f(-\frac{3}{4}\pi)=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

（16）（本小题13分）

解：设时间 A_1 为“甲是 A 组的第 i 个人”，

时间 B_1 为“乙是 B 组的第 i 个人”，i=1,2，…，7.

由题意可知 $P(A_1)=P(B_1)=\frac{1}{7}$, i=1,2，…，7.

（Ⅰ）由题意知，时间“甲的康复时间不少于 14 天”等价于“甲是 A 组的第 5 人，或者第 6 人，或者第 7 人”，所以甲的康复时间不少于 14 天的概率是

$P(A_5\cup A_6\cup A_7)=P(A_5)+P(A_6)+P(A_7)=\frac{3}{7}$

（Ⅱ）设时间 C 为“甲的康复时间比乙的康复时间长”.由题意知，

C= $A_4B_1\cup A_5B_1\cup A_6B_1\cup A_7B_1\cup A_5B_2\cup A_6B_2\cup A_7B_2\cup A_7B_3\cup A_6B_6\cup A_7B_6$.

因此 $P(C)=P(A_4B_1)+P(A_5B_1)+P(A_6B_1)+P(A_7B_1)+P(A_5B_2)$

$+P(A_6B_2)+P(A_7B_2)+P(A_7B_3)+P(A_6B_6)+P(A_7B_6)$

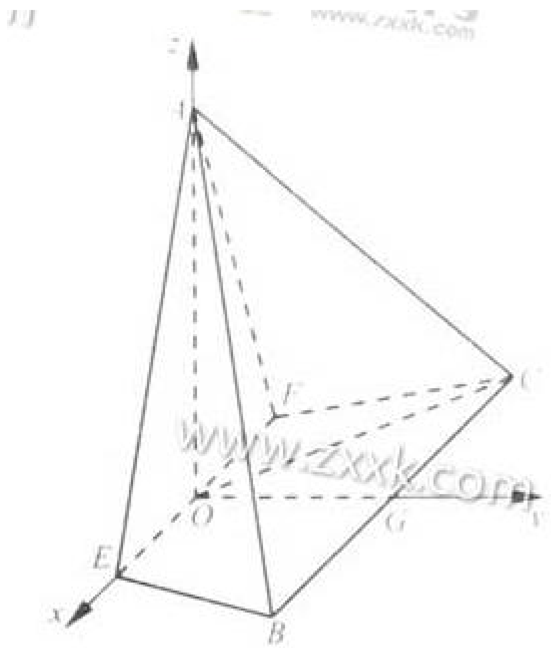
=10 $P(A_4B_1)$

=10 $P(A_4)P(B_1)$

$=\frac{10}{49}$

（Ⅲ）a=11 或 a=18

（17）（本小题 14 分）



解：（I）因为△AEF 是等边三角形，O 为 EF 的中点，

所以 AO⊥EF.

又因为平面 AEF⊥平面 EFCB，AO⊂平面 AEF，

所以 AO⊥平面 EFCB.

所以 AO⊥BE.

（Ⅱ）取 BC 中点 G，连接 OG.

由题设知 EFCB 是等腰梯形，

所以 OG⊥EF.

由（I）知 AO⊥平面 EFCB

又 OG⊂平面 EFCB，

所以 OA⊥OG.

如图建立空间直角坐标系 O-xyz，

则 E（a,0,0），A（0，0，$\sqrt{3}a$），

B（2，$\sqrt{3}$（2-a)，0），$\overrightarrow{EA}$=（-a，0，$\sqrt{3}a$），

$\overrightarrow{BE}$=（a-2，$\sqrt{3}$（a-2）,0）.

设平面 ABE 的法向量为 n=（x,y,z）

则：$\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{EA}=0 \\ n\cdot\overrightarrow{BE}=0 \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} -ax+\sqrt{3}az=0 \\ (a-2)x+\sqrt{3}(a-2)y=0 \end{cases}$$

令 z=1，则 x=$\sqrt{3}$，y=-1.于是 n=（$\sqrt{3}$，-1,1）

平面 AEF 是法向量为 p=（0,1,0）

所以 cos（n，p）=$\dfrac{n\cdot p}{|n||p|}=\dfrac{\sqrt{5}}{-5}$.

由题知二维角 F-AE-B 为钝角，所以它的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

（III）因为 BE⊥平面 AOC，所以 BE⊥OC，即$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{OC}=0$.

因为$\overrightarrow{BE}$=（a-2 ，$\sqrt{3}$（a-2)，0)，$\overrightarrow{OC}$=（-2，$\sqrt{3}$（2-a)，0)，

所以$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{OC}$=-2（a-2）-3$(a-2)^2$.

由$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{OC}=0$及 0<a<2，解得 a=$\dfrac{4}{3}$，

（18）（本小题 13 分）

解：（I）因为$f(x)$=ln（1+x）-ln（1-x），所以

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}$，$f'(0)$=2.

又因为$f(0)$=0，所以曲线 y= $f(x)$在点（0 ，$f(0)$）处的切线方程为 y=2x.

（Ⅱ）令$g(x)=f(x)$-2(x+$\dfrac{x^3}{3}$)，则

$g'(x)=f'(x)$-2（1+x^2）=$\dfrac{2x^4}{1-x^2}$.

因为$g'(x)$>0（0<x<1），所以$g(x)$在区间（0,1）上单调递增。

所以$g(x)>g(0)$=0，x∈（0，1），

即当 x∈（0，1）时，$f(x)>2(x+\frac{x^3}{3})$.

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，当 k《2 时，$f(x)>k(x+\frac{x^3}{3})$对 x∈（0，1）恒成立.

当 k>2 时，令 $h(x)=f(x)-k(x+\frac{x^3}{3})$，则

$h'(x)=f'(x)-k（1+x^2）=\frac{kx^4+2-k}{1-x^2}$.

所以当 $0<x<\sqrt[4]{\frac{k-2}{k}}$ 时，$h'(x)$<0，因此 $h(x)$ 在区间（0，$\sqrt[4]{\frac{k-2}{k}}$）上单调递减.

当 $0<x<\sqrt[4]{\frac{k-2}{k}}$ 时，$h(x)<h(0)=0$，即 $f(x)<k(x+\frac{x^3}{3})$.

所以当 K>2 时，$f(x)>k(x+\frac{x^3}{3})$并非对 x∈（0，1）恒成立.

综上可知，k 的最大值为 2。

(19)（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由题意得$\begin{cases} b=1, \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2=b^2+c^2. \end{cases}$，解得 a^2=2.

故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$

设 M（x_m，0）.

因为 m≠0，所以-1<n<1.

直线 PA 的方程为 y-1=$\frac{n-1}{m}x$，

所以 $x_m=\frac{m}{1-n}$，即 M（$\frac{m}{1-n}$，0）.

（Ⅱ）因为点 B 与点 A 关于 x 轴对称，所以 B（m，-n），

设 N(x_N,0)，\则 $x_N=\frac{m}{1+n}$.

“存在点 Q（0，y_Q）使得 ZOQM=ZONQ 等价”，“存在点 Q（0，y_Q）使得 $\frac{|OM|}{|OQ|}=\frac{|OQ|}{|ON|}$” 即 y_Q 满足 ${y_Q}^2=|x_M||x_N|$.

因为 $x_M=\frac{m}{1-n}$，$x_N=\frac{m}{1+n}$，$\frac{m^2}{2}+n^2=1$，

所以 ${y_Q}^2=|x_M||x_N|=\frac{m^2}{1-n^2}=2$.

所以 $y_Q=\sqrt{2}$ 或 $y_Q=-\sqrt{2}$.

故在 y 轴上存在点 Q，使得∠OQM=∠ONQ.点 Q 的坐标为（0，$\sqrt{2}$）或（0，-$\sqrt{2}$）.

(20)（本小题 13 分）

（Ⅰ）$\{6，12，24\}$

（Ⅱ）因为集合 M 存在一个元素是 3 的倍数，所以不妨设 a_k 是 3 的倍数.

由 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, a_n\le 18,\\ 2a_n-36, a_n>18\end{cases}$ 可归纳证明对任意 $n\ge k$， a_n 是 3 的倍数.

如果 k=1，则 M 的所有元素都是 3 的倍数.

如果 k>1，因为 a_k =2 a_{k-1} 或 a_k =2 a_{k-1}-36，所以 2 a_{k-1} 是 3 的倍数，于是 a_{k-1} 是 3 的倍数，；类似可得， a_{k-2}，…， a_1 都是 3 的倍数，从而对任意 $n\ge 1$， a_n 是 3 的倍数，因此 M 的所有元素都是 3 的倍数.

综上，若集合 M 存在一个元素是 3 的倍数，则 M 的所有元素都是 3 的倍数.

（Ⅲ）由 $a\le 36$， $a_n=\begin{cases}2a_{n-1}, a_{n-1}\le 18,\\ 2a_{n-1}-36, a_{n-1}>18\end{cases}$ 可归纳证明 $a_n\le 36(n=2,3...)$.

由于 a_1 是正整数， $a_2=\begin{cases}2a_1, a_1\le 18,\\ 2a_1-36, a_1>18,\end{cases}$ 所以 a_2 是 2 的倍数.

从而当 $n\ge 3$ 时， a_n 是 4 的倍数.

如果 a_1 是 3 的倍数，由（Ⅱ）知对所有正整数 n， a_n 是 3 的倍数.

因此当 $n\le 3$ 时， $a_n\in\{12,24,36\}$. 这时 M 的元素个数不超过 5.

如果 a_1 不是 3 的倍数，由（Ⅱ）知所有正整数 n， a_n 不是 3 的倍数.

因此当 $n\ge 3$ 时 $a_n\in\{4,8,16,20,28,32\}$. 这时 M 的元素个数不超过 8.

当 a_1=1 时， $M=\{1,2,4,8,16,20,28,32\}$ 有 8 个元素.

综上可知，集合 M 的元素个数最大值为 8.