2016 年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标I）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．（5 分）设集合 A={1，3，5，7}，B={x|2≤x≤5}，则 A∩B=（　　）

A．{1，3}　　B．{3，5}　　C．{5，7}　　D．{1，7}

【考点】1E：交集及其运算.

【专题】11：计算题；29：规律型；5J：集合.

【分析】直接利用交集的运算法则化简求解即可.

【解答】解：集合 A={1，3，5，7}，B={x|2≤x≤5}，

则 A∩B={3，5}.

故选：B.

【点评】本题考查交集的求法，考查计算能力.

2．（5 分）设（1+2i）（a+i）的实部与虚部相等，其中 a 为实数，则 a 等于（　　）

A．﹣3　　B．﹣2　　C．2　　D．3

【考点】A5：复数的运算.

【专题】11：计算题；29：规律型；35：转化思想；5N：数系的扩充和复数.

【分析】利用复数的乘法运算法则，通过复数相等的充要条件求解即可.

【解答】解：（1+2i）（a+i）=a﹣2+（2a+1）i 的实部与虚部相等，

可得：a﹣2=2a+1，

解得 a=﹣3.

故选：A.

【点评】本题考查复数的相等的充要条件的应用，复数的乘法的运算法则，考查计算能力.

3．（5 分）为美化环境，从红、黄、白、紫 4 种颜色的花中任选 2 种花种在一个花坛中，余

下的 2 种花种在另一个花坛中，则红色和紫色的花不在同一花坛的概率是（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　　B．$\frac{1}{2}$　　　C．$\frac{2}{3}$　　　D．$\frac{5}{6}$

【考点】CB：古典概型及其概率计算公式．

【专题】12：应用题；34：方程思想；49：综合法；5I：概率与统计．

【分析】确定基本事件的个数，利用古典概型的概率公式，可得结论．

【解答】解：从红、黄、白、紫 4 种颜色的花中任选 2 种花种在一个花坛中，余下的 2 种花种在另一个花坛中，有 C_4^2=6 种方法，红色和紫色的花在同一花坛，有 2 种方法，红色和紫色的花不在同一花坛，有 4 种方法，所以所求的概率为$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$．

另解：由列举法可得，红、黄、白、紫记为 1，2，3，4，

即有（12，34），（13，24），（14，23），（23，14），（24，13），（34，12），

则 P=$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$．

故选：C．

【点评】本题考查等可能事件的概率计算与分步计数原理的应用，考查学生的计算能力，比较基础．

4．（5 分）△ABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c．已知 a=$\sqrt{5}$，c=2，cosA=$\frac{2}{3}$，则 b=（　　）

A．$\sqrt{2}$　　　B．$\sqrt{3}$　　　C．2　　　D．3

【考点】HR：余弦定理．

【专题】11：计算题；35：转化思想；4R：转化法；58：解三角形．

【分析】由余弦定理可得 cosA=$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，利用已知整理可得 $3b^2-8b-3=0$，从而解得 b 的值．

【解答】解：∵a=$\sqrt{5}$，c=2，cosA=$\frac{2}{3}$，

∴由余弦定理可得：cosA=$\frac{2}{3}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+4-5}{2\times b\times 2}$，整理可得：$3b^2-8b-3=0$，

∴解得：b=3 或 $-\frac{1}{3}$（舍去）．

故选：D．

【点评】本题主要考查了余弦定理，一元二次方程的解法在解三角形中的应用，考查了计算能力和转化思想，属于基础题．

5．（5 分）直线 l 经过椭圆的一个顶点和一个焦点，若椭圆中心到 l 的距离为其短轴长的$\frac{1}{4}$，则该椭圆的离心率为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

【考点】K4：椭圆的性质．

【专题】11：计算题；29：规律型；35：转化思想；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】设出椭圆的方程，求出直线的方程，利用已知条件列出方程，即可求解椭圆的离心率．

【解答】解：设椭圆的方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，直线 l 经过椭圆的一个顶点和一个焦点，

则直线方程为：$\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1$，椭圆中心到 l 的距离为其短轴长的$\frac{1}{4}$，

可得：$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{b}{2}$，

$4=b^2(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2})$，

$\therefore\frac{b^2}{c^2}=3$，

$\frac{a^2-c^2}{c^2}=3$，

$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$．

故选：B．

【点评】本题考查椭圆的简单性质的应用，考查点到直线的距离公式，椭圆的离心率的求法，考查计算能力．

6．（5 分）将函数 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$的图象向右平移$\frac{1}{4}$个周期后，所得图象对应的函数为（　　）

A．$y=2\sin(2x+\frac{\pi}{4})$　　B．$y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

C．$y=2\sin(2x-\frac{\pi}{4})$　　D．$y=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

【考点】HJ：函数 y=Asin（ωx+φ）的图象变换．

【专题】33：函数思想；48：分析法；57：三角函数的图像与性质．

【分析】求得函数 y 的最小正周期，即有所对的函数式为 $y=2\sin[2(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{6}]$，化简整理即可得到所求函数式．

【解答】解：函数 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

由题意即为函数 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位，

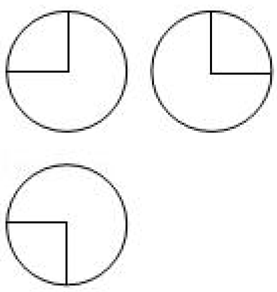
可得图象对应的函数为 $y=2\sin[2(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{6}]$，

即有 $y=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$．

故选：D．

【点评】本题考查三角函数的图象平移变换，注意相位变换针对自变量 x 而言，考查运算能力，属于基础题和易错题．

7．（5 分）如图，某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条相互垂直的半径．若该几何体的体积是$\frac{28\pi}{3}$，则它的表面积是（　　）



A．17π　　B．18π　　C．20π　　D．28π

【考点】L!：由三视图求面积、体积．

【专题】11：计算题；29：规律型；31：数形结合；35：转化思想；5F：空间位置关系与距离．

【分析】判断三视图复原的几何体的形状，利用体积求出几何体的半径，然后求解几何体的表

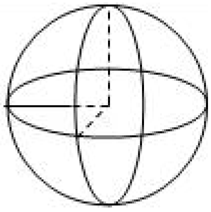
面积．

【解答】解：由题意可知三视图复原的几何体是一个球去掉$\frac{1}{8}$后的几何体，如图：

可得：$\frac{7}{8}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{28\pi}{3}$，R=2．

它的表面积是：$\frac{7}{8}\times 4\pi\bullet 2^2+\frac{3}{4}\times\pi\bullet 2^2=17\pi$．

故选：A．



【点评】本题考查三视图求解几何体的体积与表面积，考查计算能力以及空间想象能力．

8．（5 分）若 a＞b＞0，0＜c＜1，则（　　）

A．$\log_a c<\log_b c$　B．$\log_c a<\log_c b$　C．$a^c<b^c$　D．$c^a>c^b$

【考点】4M：对数值大小的比较．

【专题】35：转化思想；4R：转化法；51：函数的性质及应用．

【分析】根据指数函数，对数函数，幂函数的单调性结合换底公式，逐一分析四个结论的真假，可得答案．

【解答】解：∵a＞b＞0，0＜c＜1，

∴$\log_c a<\log_c b$，故 B 正确；

∴当 a＞b＞1 时，

$0>\log_a c>\log_b c$，故 A 错误；

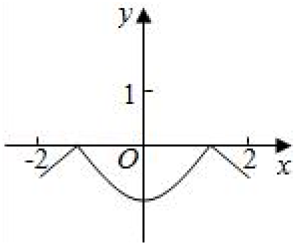
$a^c>b^c$，故 C 错误；

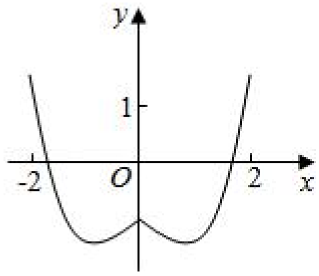
$c^a<c^b$，故 D 错误；

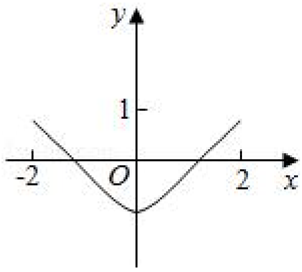
故选：B．

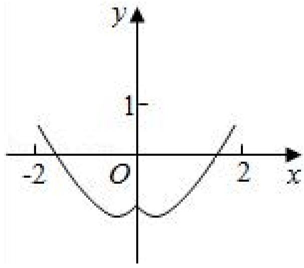
【点评】本题考查的知识点是指数函数，对数函数，幂函数的单调性，难度中档．

9．（5 分）函数 $y=2x^2-e^{|x|}$在[－2，2]的图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【考点】3A：函数的图象与图象的变换．

【专题】27：图表型；48：分析法；51：函数的性质及应用．

【分析】根据已知中函数的解析式，分析函数的奇偶性，最大值及单调性，利用排除法，可得答案．

【解答】解：∵f（x）$=y=2x^2-e^{|x|}$，

∴f（﹣x）$=2(-x)^2-e^{|-x|}=2x^2-e^{|x|}$，

故函数为偶函数，

当 $x=\pm2$ 时，$y=8-e^2\in(0,1)$，故排除 A，B；

当 $x\in[0,2]$ 时，f（x）$=y=2x^2-e^x$，

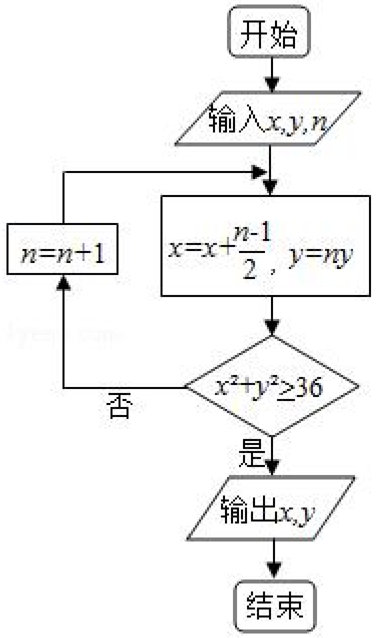
∴$f'(x)=4x-e^x=0$ 有解，

故函数 $y=2x^2-e^{|x|}$ 在$[0,2]$不是单调的，故排除 C，

故选：D．

【点评】本题考查的知识点是函数的图象，对于超越函数的图象，一般采用排除法解答．

10．（5 分）执行下面的程序框图，如果输入的 x=0，y=1，n=1，则输出 x，y 的值满足（　　）



A．$y=2x$　　B．$y=3x$　　C．$y=4x$　　D．$y=5x$

【考点】EF：程序框图．

【专题】11：计算题；28：操作型；5K：算法和程序框图．

【分析】由已知中的程序框图可知：该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 x，y 的值，模拟程序的运行过程，分析循环中各变量值的变化情况，可得答案．

【解答】解：输入 $x=0$，$y=1$，$n=1$，

则 $x=0$，$y=1$，不满足 $x^2+y^2\geqslant 36$，故 $n=2$，

则 $x=\frac{1}{2}$，$y=2$，不满足 $x^2+y^2\geqslant 36$，故 $n=3$，

则 $x=\frac{3}{2}$，$y=6$，满足 $x^2+y^2\geqslant 36$，

故 $y=4x$，

故选：C．

【点评】本题考查的知识点是程序框图，当循环的次数不多，或有规律时，常采用模拟循环的方法解答．

11．（5 分）平面α过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A，α∥平面 CB_1D_1，α∩平面 $ABCD=m$，α∩平面 $ABB_1A_1=n$，则 m、n 所成角的正弦值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

【考点】LM：异面直线及其所成的角．

【专题】11：计算题；29：规律型；31：数形结合；35：转化思想；5G：空间角．

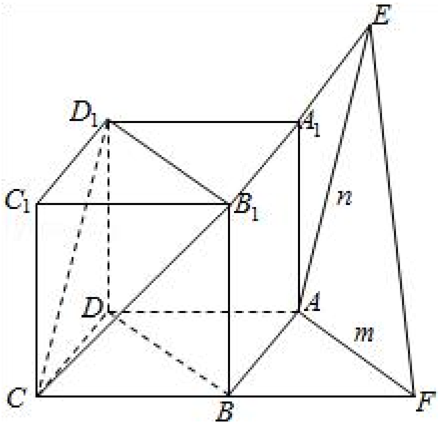
【分析】画出图形，判断出 m、n 所成角，求解即可．

【解答】解：如图：α∥平面 CB_1D_1，α∩平面 ABCD=m，α∩平面 ABA_1B_1=n，

可知：n∥CD_1，m∥B_1D_1，∵△CB_1D_1 是正三角形．m、n 所成角就是∠CD_1B_1=60°．

则 m、n 所成角的正弦值为：$\frac{\sqrt{3}}{2}$．

故选：A．



【点评】本题考查异面直线所成角的求法，考查空间想象能力以及计算能力．

12．（5 分）若函数 f（x）=x﹣$\frac{1}{3}$sin2x+asinx 在（﹣∞，+∞）单调递增，则 a 的取值范围是（　　）

A．[﹣1，1]　　B．[﹣1，$\frac{1}{3}$]　　C．[﹣$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$]　　D．[﹣1，﹣$\frac{1}{3}$]

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性．

【专题】35：转化思想；4C：分类法；53：导数的综合应用．

【分析】求出 f（x）的导数，由题意可得 f′（x）≥0 恒成立，设 t=cosx（﹣1≤t≤1），即有 5﹣$4t^2$+3at≥0，对 t 讨论，分 t=0，0<t≤1，﹣1≤t<0，分离参数，运用函数的单调性可得最值，解不等式即可得到所求范围．

【解答】解：函数 f（x）=x﹣$\frac{1}{3}$sin2x+asinx 的导数为 f′（x）=1﹣$\frac{2}{3}$cos2x+acosx，

由题意可得 f′（x）≥0 恒成立，

即为 $1-\frac{2}{3}\cos2x+a\cos x\geqslant0$，

即有 $\frac{5}{3}-\frac{4}{3}\cos^2x+a\cos x\geqslant0$，

设 $t=\cos x$（$-1\leqslant t\leqslant1$），即有 $5-4t^2+3at\geqslant0$，

当 $t=0$ 时，不等式显然成立；

当 $0<t\leqslant1$ 时，$3a\geqslant4t-\frac{5}{t}$，

由 $4t-\frac{5}{t}$ 在（0，1]递增，可得 $t=1$ 时，取得最大值 -1，

可得 $3a\geqslant-1$，即 $a\geqslant-\frac{1}{3}$；

当 $-1\leqslant t<0$ 时，$3a\leqslant4t-\frac{5}{t}$，

由 $4t-\frac{5}{t}$ 在[-1，0）递增，可得 $t=-1$ 时，取得最小值 1，

可得 $3a\leqslant1$，即 $a\leqslant\frac{1}{3}$.

综上可得 a 的范围是$[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$.

另解：设 $t=\cos x$（$-1\leqslant t\leqslant1$），即有 $5-4t^2+3at\geqslant0$，

由题意可得 $5-4+3a\geqslant0$，且 $5-4-3a\geqslant0$，

解得 a 的范围是$[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$.

故选：C.

【点评】本题考查导数的运用：求单调性，考查不等式恒成立问题的解法，注意运用参数分离和换元法，考查函数的单调性的运用，属于中档题.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分

13．（5 分）设向量 $\vec{a}=(x,x+1)$，$\vec{b}=(1,2)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 x=__$-\frac{2}{3}$__.

【考点】9T：数量积判断两个平面向量的垂直关系.

【专题】11：计算题；41：向量法；49：综合法；5A：平面向量及应用.

【分析】根据向量垂直的充要条件便可得出 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，进行向量数量积的坐标运算即可得出关于 x 的方程，解方程便可得出 x 的值.

【解答】解：∵$\vec{a}\perp\vec{b}$；

∴$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$；

即 x+2（x+1）=0；

∴ $x=-\frac{2}{3}$.

故答案为：$-\frac{2}{3}$.

【点评】考查向量垂直的充要条件，以及向量数量积的坐标运算，清楚向量坐标的概念.

14．（5 分）已知θ是第四象限角，且 $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$，则 $\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=$__$-\frac{4}{3}$__.

【考点】GP：两角和与差的三角函数.

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；56：三角函数的求值.

【分析】由θ得范围求得$\theta+\frac{\pi}{4}$的范围，结合已知求得 $\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$，再由诱导公式求得 $\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)$ 及 $\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)$，进一步由诱导公式及同角三角函数基本关系式求得 $\tan(\theta-\frac{\pi}{4})$ 的值.

【解答】解：∵θ是第四象限角，

∴ $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\theta<2k\pi$，则 $-\frac{\pi}{4}+2k\pi<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in Z$，

又 $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$，

∴$\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=\sqrt{1-\sin^2(\theta+\frac{\pi}{4})}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$.

∴$\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)=\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$，$\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)=\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{4}{5}$.

则 $\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=-\tan(\frac{\pi}{4}-\theta)=-\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}=-\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$.

故答案为：$-\frac{4}{3}$.

【点评】本题考查两角和与差的正切，考查诱导公式及同角三角函数基本关系式的应用，是基础题.

15．（5 分）设直线 y=x+2a 与圆 C：$x^2+y^2-2ay-2=0$ 相交于 A，B 两点，若$|AB|=2\sqrt{3}$，则

圆 C 的面积为$\underline{\quad 4\pi \quad}$.

【考点】J8：直线与圆相交的性质．

【专题】11：计算题；35：转化思想；5B：直线与圆．

【分析】圆 C：$x^2+y^2-2ay-2=0$ 的圆心坐标为（0，a），半径为$\sqrt{a^2+2}$，利用圆的弦长公式，求出 a 值，进而求出圆半径，可得圆的面积．

【解答】解：圆 C：$x^2+y^2-2ay-2=0$ 的圆心坐标为（0，a），半径为$\sqrt{a^2+2}$，

∵直线 $y=x+2a$ 与圆 C：$x^2+y^2-2ay-2=0$ 相交于 A，B 两点，且$|AB|=2\sqrt{3}$，

∴圆心（0，a）到直线 $y=x+2a$ 的距离 $d=\frac{|a|}{\sqrt{2}}$，

即$\frac{a^2}{2}+3=a^2+2$，

解得：$a^2=2$，

故圆的半径 $r=2$．

故圆的面积 $S=4\pi$，

故答案为：4π

【点评】本题考查的知识点是直线与圆相交的性质，点到直线的距离公式，难度中档．

16．（5 分）某高科技企业生产产品 A 和产品 B 需要甲、乙两种新型材料．生产一件产品 A 需要甲材料 1.5kg，乙材料 1kg，用 5 个工时；生产一件产品 B 需要甲材料 0.5kg，乙材料 0.3kg，用 3 个工时，生产一件产品 A 的利润为 2100 元，生产一件产品 B 的利润为 900 元．该企业现有甲材料 150kg，乙材料 90kg，则在不超过 600 个工时的条件下，生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为$\underline{\quad 216000 \quad}$元．

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】11：计算题；29：规律型；31：数形结合；33：函数思想；35：转化思想．

【分析】设 A、B 两种产品分别是 x 件和 y 件，根据题干的等量关系建立不等式组以及目标函数，利用线性规划作出可行域，通过目标函数的几何意义，求出其最大值即可；

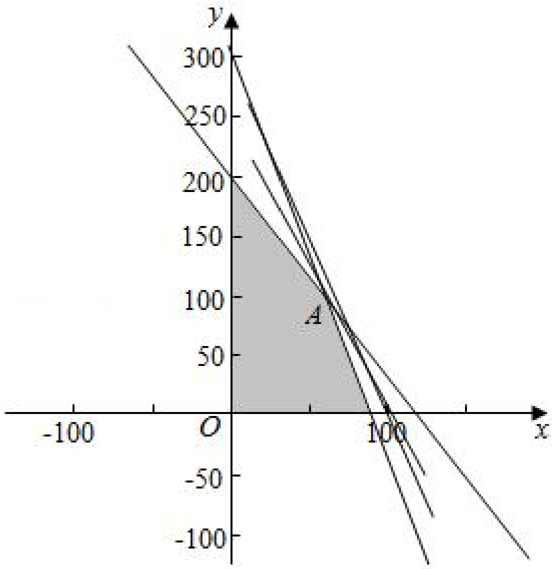
【解答】解：（1）设 A、B 两种产品分别是 x 件和 y 件，获利为 z 元．

由题意，得$\begin{cases}x\in N，y\in N\\1.5x+0.5y\leqslant 150\\x+0.3y\leqslant 90\\5x+3y\leqslant 600\end{cases}$，$z=2100x+900y$.

不等式组表示的可行域如图：由题意可得$\begin{cases}x+0.3y=90\\5x+3y=600\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=60\\y=100\end{cases}$，A（60，100），

目标函数$z=2100x+900y$．经过A时，直线的截距最大，目标函数取得最大值：$2100\times 60+900\times 100=216000$元．

故答案为：216000．



【点评】本题考查了列二元一次方程组解实际问题的运用，二元一次方程组的解法的运用，不等式组解实际问题的运用，不定方程解实际问题的运用，解答时求出最优解是解题的关键．

三.解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17．（12分）已知$\{a_n\}$是公差为3的等差数列，数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$，$b_2=\frac{1}{3}$，$a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$．

（I）求$\{a_n\}$的通项公式；

（II）求$\{b_n\}$的前n项和．

【考点】8H：数列递推式．

【专题】11：计算题；4O：定义法；54：等差数列与等比数列．

【分析】（I）令n=1，可得$a_1=2$，结合$\{a_n\}$是公差为3的等差数列，可得$\{a_n\}$的通项公式；

（II）由（1）可得：数列$\{b_n\}$是以1为首项，以$\frac{1}{3}$为公比的等比数列，进而可得：$\{b_n\}$的前n

项和．

【解答】解：（I）∵$a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$．

当 n=1 时，$a_1b_2+b_2=b_1$．

∵$b_1=1$，$b_2=\frac{1}{3}$，

∴$a_1=2$，

又∵$\{a_n\}$是公差为 3 的等差数列，

∴$a_n=3n-1$，

（II）由（I）知：$(3n-1)b_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$．

即 $3b_{n+1}=b_n$．

即数列$\{b_n\}$是以 1 为首项，以$\frac{1}{3}$为公比的等比数列，

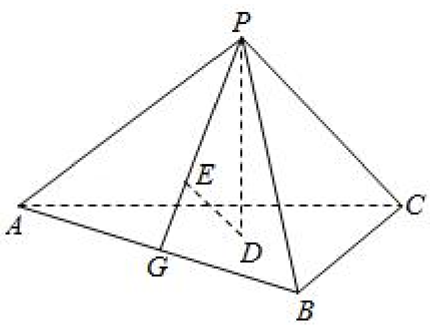
∴$\{b_n\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}(1-3^{-n})=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}$．

【点评】本题考查的知识点是数列的递推式，数列的通项公式，数列的前 n 项和公式，难度中档．

18．（12 分）如图，已知正三棱锥 P﹣ABC 的侧面是直角三角形，PA=6，顶点 P 在平面 ABC 内的正投影为点 D，D 在平面 PAB 内的正投影为点 E，连接 PE 并延长交 AB 于点 G．

（I）证明：G 是 AB 的中点；

（II）在图中作出点 E 在平面 PAC 内的正投影 F（说明作法及理由），并求四面体 PDEF 的体积．



【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积；MK：点、线、面间的距离计算．

【专题】11：计算题；35：转化思想；5F：空间位置关系与距离．

【分析】（I）根据题意分析可得 PD⊥平面 ABC，进而可得 PD⊥AB，同理可得 DE⊥AB，结合两者分析可得 AB⊥平面 PDE，进而分析可得 AB⊥PG，又由 PA=PB，由等腰三角形的性质可得证明；

（II）由线面垂直的判定方法可得 EF⊥平面 PAC，可得 F 为 E 在平面 PAC 内的正投影．由棱锥的体积公式计算可得答案．

【解答】解：（I）证明：∵P﹣ABC 为正三棱锥，且 D 为顶点 P 在平面 ABC 内的正投影，

∴PD⊥平面 ABC，则 PD⊥AB，

又 E 为 D 在平面 PAB 内的正投影，

∴DE⊥面 PAB，则 DE⊥AB，

∵PD∩DE=D，

∴AB⊥平面 PDE，连接 PE 并延长交 AB 于点 G，

则 AB⊥PG，

又 PA=PB，

∴G 是 AB 的中点；

（II）在平面 PAB 内，过点 E 作 PB 的平行线交 PA 于点 F，F 即为 E 在平面 PAC 内的正投影．

∵正三棱锥 P﹣ABC 的侧面是直角三角形，

∴PB⊥PA，PB⊥PC，

又 EF∥PB，所以 EF⊥PA，EF⊥PC，因此 EF⊥平面 PAC，

即点 F 为 E 在平面 PAC 内的正投影．

连结 CG，因为 P 在平面 ABC 内的正投影为 D，所以 D 是正三角形 ABC 的中心．

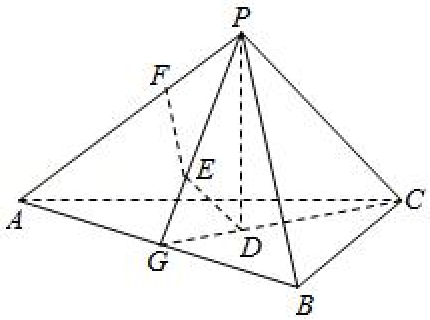
由（I）知，G 是 AB 的中点，所以 D 在 CG 上，故 $CD=\frac{2}{3}CG$．

由题设可得 PC⊥平面 PAB，DE⊥平面 PAB，所以 DE∥PC，因此 $PE=\frac{2}{3}PG$，$DE=\frac{1}{3}PC$．

由已知，正三棱锥的侧面是直角三角形且 PA=6，可得 DE=2，$PG=3\sqrt{2}$，$PE=2\sqrt{2}$．

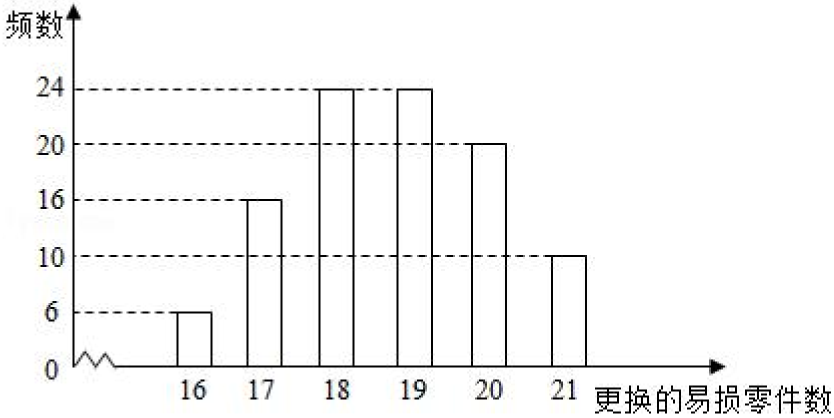
在等腰直角三角形 EFP 中，可得 EF=PF=2．

所以四面体 PDEF 的体积 $V=\frac{1}{3}\times DE\times S_{\triangle PEF}=\frac{1}{3}\times 2\times \frac{1}{2}\times 2\times 2=\frac{4}{3}$．



【点评】本题考查几何体的体积计算以及线面垂直的性质、应用，解题的关键是正确分析几何体的各种位置、距离关系．

19．（12 分）某公司计划购买 1 台机器，该种机器使用三年后即被淘汰．机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个 200 元．在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个 500 元．现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得如图柱状图：



记 x 表示 1 台机器在三年使用期内需更换的易损零件数，y 表示 1 台机器在购买易损零件上所需的费用（单位：元），n 表示购机的同时购买的易损零件数．

（I）若 n=19，求 y 与 x 的函数解析式；

（II）若要求"需更换的易损零件数不大于 n"的频率不小于 0.5，求 n 的最小值；

（III）假设这 100 台机器在购机的同时每台都购买 19 个易损零件，或每台都购买 20 个易损零件，分别计算这 100 台机器在购买易损零件上所需费用的平均数，以此作为决策依据，购买 1 台机器的同时应购买 19 个还是 20 个易损零件？

【考点】3H：函数的最值及其几何意义；5C：根据实际问题选择函数类型；B8：频率分布直方图．

【专题】11：计算题；51：函数的性质及应用；5I：概率与统计．

【分析】（I）若 n=19，结合题意，可得 y 与 x 的分段函数解析式；

（II）由柱状图分别求出各组的频率，结合“需更换的易损零件数不大于 n”的频率不小于 0.5，可得 n 的最小值；

（III）分别求出每台都购买 19 个易损零件，或每台都购买 20 个易损零件时的平均费用，比较后，可得答案．

【解答】解：（I）当 n=19 时，

$$y=\begin{cases}19\times200, & x\leqslant19\\ 19\times200+(x-19)\times500, & x>19\end{cases}=\begin{cases}3800, & x\leqslant19\\ 500x-5700, & x>19\end{cases}$$

（II）由柱状图知，更换的易损零件数为 16 个频率为 0.06，

更换的易损零件数为 17 个频率为 0.16，

更换的易损零件数为 18 个频率为 0.24，

更换的易损零件数为 19 个频率为 0.24

又∵更换易损零件不大于 n 的频率为不小于 0.5．

则 $n\geqslant19$

∴n 的最小值为 19 件；

（III）假设这 100 台机器在购机的同时每台都购买 19 个易损零件，

所须费用平均数为：$\frac{1}{100}$（70×19×200+4300×20+4800×10）=4000（元）

假设这 100 台机器在购机的同时每台都购买 20 个易损零件，

所须费用平均数为$\frac{1}{100}$（90×4000+10×4500）=4050（元）

∵4000＜4050

∴购买 1 台机器的同时应购买 19 台易损零件．

【点评】本题考查的知识点是分段函数的应用，频率分布条形图，方案选择，难度中档．

20．（12 分）在直角坐标系 xOy 中，直线 l：y=t（$t\neq0$）交 y 轴于点 M，交抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）于点 P，M 关于点 P 的对称点为 N，连结 ON 并延长交 C 于点 H．

（I）求$\frac{|OH|}{|ON|}$；

（II）除 H 以外，直线 MH 与 C 是否有其它公共点？说明理由．

【考点】K8：抛物线的性质．

【专题】15：综合题；35：转化思想；49：综合法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】（I）求出P，N，H的坐标，利用$\frac{|OH|}{|ON|}=\frac{|y_H|}{|y_N|}$，求$\frac{|OH|}{|ON|}$；

（II）直线MH的方程为$y=\frac{p}{2t}x+t$，与抛物线方程联立，消去x可得$y^2-4ty+4t^2=0$，利用判别式可得结论．

【解答】解：（I）将直线l与抛物线方程联立，解得P（$\frac{t^2}{2p}$，t），

∵M关于点P的对称点为N，

∴$\frac{x_N+x_M}{2}=\frac{t^2}{2p}$，$\frac{y_N+y_M}{2}=t$，

∴N（$\frac{t^2}{p}$，t），

∴ON的方程为$y=\frac{p}{t}x$，

与抛物线方程联立，解得H（$\frac{2t^2}{p}$，2t）

∴$\frac{|OH|}{|ON|}=\frac{|y_H|}{|y_N|}=2$；

（II）由（I）知$k_{MH}=\frac{p}{2t}$，

∴直线MH的方程为$y=\frac{p}{2t}x+t$，与抛物线方程联立，消去x可得$y^2-4ty+4t^2=0$，

∴$\triangle=16t^2-4\times4t^2=0$，

∴直线MH与C除点H外没有其它公共点．

【点评】本题考查直线与抛物线的位置关系，考查学生的计算能力，正确联立方程是关键．

21．（12分）已知函数$f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$．

（I）讨论f（x）的单调性；

（II）若f（x）有两个零点，求a的取值范围．

【考点】52：函数零点的判定定理；6B：利用导数研究函数的单调性．

【专题】35：转化思想；48：分析法；51：函数的性质及应用；53：导数的综合应用．

【分析】（I）求出f（x）的导数，讨论当a≥0时，$a<-\frac{e}{2}$时，$a=-\frac{e}{2}$时，$-\frac{e}{2}<a<0$，由导

数大于 0，可得增区间；由导数小于 0，可得减区间；

（II）由（I）的单调区间，对 a 讨论，结合单调性和函数值的变化特点，即可得到所求范围．

【解答】解：（I）由 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$，

可得 $f'(x)=(x-1)e^x+2a(x-1)=(x-1)(e^x+2a)$，

①当 $a\geq 0$ 时，由 $f'(x)>0$，可得 $x>1$；由 $f'(x)<0$，可得 $x<1$，

即有 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 递减；在 $(1, +\infty)$ 递增（如右上图）；

②当 $a<0$ 时，（如右下图）若 $a=-\frac{e}{2}$，则 $f'(x)\geq 0$ 恒成立，即有 $f(x)$ 在 R 上递增；

若 $a<-\frac{e}{2}$ 时，由 $f'(x)>0$，可得 $x<1$ 或 $x>\ln(-2a)$；

由 $f'(x)<0$，可得 $1<x<\ln(-2a)$．

即有 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$，$(\ln(-2a), +\infty)$ 递增；

在 $(1, \ln(-2a))$ 递减；

若 $-\frac{e}{2}<a<0$，由 $f'(x)>0$，可得 $x<\ln(-2a)$ 或 $x>1$；

由 $f'(x)<0$，可得 $\ln(-2a)<x<1$．

即有 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln(-2a))$，$(1, +\infty)$ 递增；

在 $(\ln(-2a), 1)$ 递减；

（II）①由（I）可得当 $a>0$ 时，

$f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 递减；在 $(1, +\infty)$ 递增，

且 $f(1)=-e<0$，$x\to+\infty$，$f(x)\to+\infty$；

当 $x\to-\infty$ 时 $f(x)>0$ 或找到一个 $x<1$ 使得 $f(x)>0$ 对于 $a>0$ 恒成立，

$f(x)$ 有两个零点；

②当 $a=0$ 时，$f(x)=(x-2)e^x$，所以 $f(x)$ 只有一个零点 $x=2$；

③当 $a<0$ 时，

若 $a<-\frac{e}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(1, \ln(-2a))$ 递减，

在 $(-\infty, 1)$，$(\ln(-2a), +\infty)$ 递增，

又当 $x\leq 1$ 时，$f(x)<0$，所以 $f(x)$ 不存在两个零点；

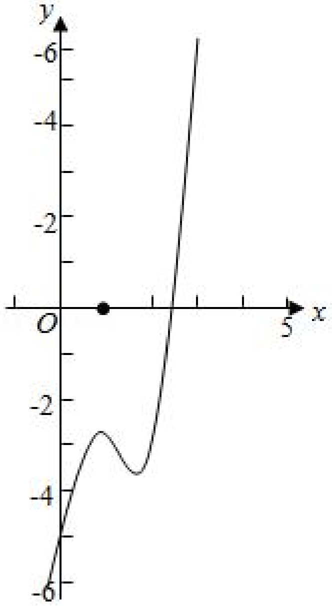
当 $a\geq -\frac{e}{2}$ 时，在 $(-\infty, \ln(-2a))$ 单调增，在 $(1, +\infty)$ 单调增，

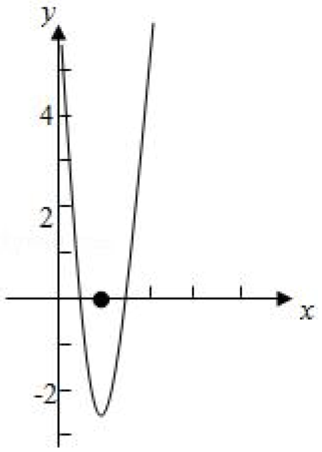
在 $(\ln(-2a), 1)$ 单调减，

只有 $f(\ln(-2a))$ 等于 0 才有两个零点，

而当 x≤1 时，f（x）＜0，所以只有一个零点不符题意．

综上可得，f（x）有两个零点时，a 的取值范围为（0，+∞）．





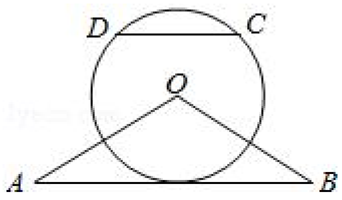
【点评】本题考查导数的运用：求单调区间，考查函数零点的判断，注意运用分类讨论的思想方法和函数方程的转化思想，考查化简整理的运算能力，属于难题．

请考生在 22、23、24 三题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．[选修 4-1：几何证明选讲]

22．（10 分）如图，△OAB 是等腰三角形，∠AOB=120°．以 O 为圆心，$\frac{1}{2}$OA 为半径作圆．

（I）证明：直线 AB 与⊙O 相切；

（II）点 C，D 在⊙O 上，且 A，B，C，D 四点共圆，证明：AB∥CD．



【考点】N9：圆的切线的判定定理的证明．

【专题】14：证明题；35：转化思想；49：综合法；5M：推理和证明．

【分析】(Ⅰ)设 K 为 AB 中点，连结 OK．根据等腰三角形 AOB 的性质知 OK⊥AB，∠A=30°，$OK=OA\sin30°=\frac{1}{2}OA$，则 AB 是圆 O 的切线．

（Ⅱ）设圆心为 T，证明 OT 为 AB 的中垂线，OT 为 CD 的中垂线，即可证明结论．

【解答】证明：（Ⅰ）设 K 为 AB 中点，连结 OK，

∵OA=OB，∠AOB=120°，

∴OK⊥AB，∠A=30°，$OK=OA\sin30°=\frac{1}{2}OA$，

∴直线 AB 与⊙O 相切；

（Ⅱ）因为 OA=2OD，所以 O 不是 A，B，C，D 四点所在圆的圆心．设 T 是 A，B，C，D 四点所在圆的圆心．

∵OA=OB，TA=TB，

∴OT 为 AB 的中垂线，

同理，OC=OD，TC=TD，

∴OT 为 CD 的中垂线，

∴AB∥CD．

【点评】本题考查了切线的判定，考查四点共圆，考查学生分析解决问题的能力．解答此题时，充分利用了等腰三角形"三合一"的性质．

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

23．在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos t\\y=1+a\sin t\end{cases}$（t 为参数，a＞0）．在以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C_2：$\rho=4\cos\theta$．

（Ⅰ）说明 C_1 是哪种曲线，并将 C_1 的方程化为极坐标方程；

（Ⅱ）直线 C_3 的极坐标方程为$\theta=\alpha_0$，其中α_0满足 $\tan\alpha_0=2$，若曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_3 上，

求 a．

【考点】Q4：简单曲线的极坐标方程；QE：参数方程的概念．

【专题】11：计算题；35：转化思想；4A：数学模型法；5S：坐标系和参数方程．

【分析】（I）把曲线 C_1 的参数方程变形，然后两边平方作和即可得到普通方程，可知曲线 C_1 是圆，化为一般式，结合 $x^2+y^2=\rho^2$，$y=\rho\sin\theta$ 化为极坐标方程；

（II）化曲线 C_2、C_3 的极坐标方程为直角坐标方程，由条件可知 $y=x$ 为圆 C_1 与 C_2 的公共弦所在直线方程，把 C_1 与 C_2 的方程作差，结合公共弦所在直线方程为 $y=2x$ 可得 $1-a^2=0$，则 a 值可求．

【解答】解：（I）由 $\begin{cases}x=a\cos t\\y=1+a\sin t\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=a\cos t\\y-1=a\sin t\end{cases}$，两式平方相加得，$x^2+(y-1)^2=a^2$．

∴C_1 为以（0，1）为圆心，以 a 为半径的圆．

化为一般式：$x^2+y^2-2y+1-a^2=0$．①

由 $x^2+y^2=\rho^2$，$y=\rho\sin\theta$，得 $\rho^2-2\rho\sin\theta+1-a^2=0$；

（II）C_2：$\rho=4\cos\theta$，两边同时乘 ρ 得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$，

∴$x^2+y^2=4x$，②

即 $(x-2)^2+y^2=4$．

由 C_3：$\theta=\alpha_0$，其中 α_0 满足 $\tan\alpha_0=2$，得 $y=2x$，

∵曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_3 上，

∴$y=2x$ 为圆 C_1 与 C_2 的公共弦所在直线方程，

①－②得：$4x-2y+1-a^2=0$，即为 C_3，

∴$1-a^2=0$，

∴$a=1$（$a>0$）．

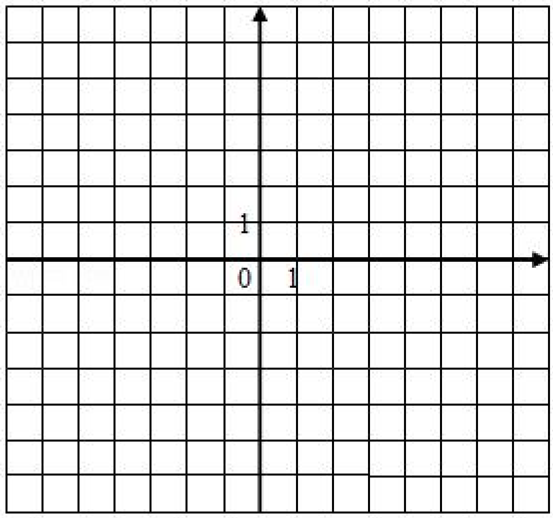
【点评】本题考查参数方程即简单曲线的极坐标方程，考查了极坐标与直角坐标的互化，训练了两圆公共弦所在直线方程的求法，是基础题．

[选修 4-5：不等式选讲]

24．已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-3|$．

（I）在图中画出 $y=f(x)$ 的图象；

（II）求不等式 $|f(x)|>1$ 的解集．



【考点】&2：带绝对值的函数；3A：函数的图象与图象的变换．

【专题】35：转化思想；48：分析法；59：不等式的解法及应用．

【分析】（I）运用分段函数的形式写出 f（x）的解析式，由分段函数的画法，即可得到所求图象；

（II）分别讨论当 x≤－1 时，当－1<x<$\frac{3}{2}$时，当 x≥$\frac{3}{2}$时，解绝对值不等式，取交集，最后求并集即可得到所求解集．

【解答】解：（I）f（x）=$\begin{cases} x-4, & x\leqslant -1 \\ 3x-2, & -1<x<\frac{3}{2} \\ 4-x, & x\geqslant \frac{3}{2} \end{cases}$，

由分段函数的图象画法，可得 f（x）的图象，如右：

（II）由|f（x）|>1，可得

当 x≤－1 时，|x－4|>1，解得 x>5 或 x<3，即有 x≤－1；

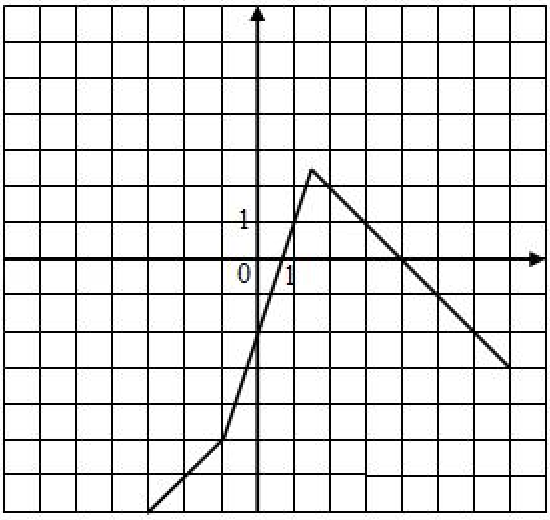
当－1<x<$\frac{3}{2}$时，|3x－2|>1，解得 x>1 或 x<$\frac{1}{3}$，

即有－1<x<$\frac{1}{3}$或 1<x<$\frac{3}{2}$；

当 x≥$\frac{3}{2}$时，|4－x|>1，解得 x>5 或 x<3，即有 x>5 或$\frac{3}{2}$≤x<3．

综上可得，x<$\frac{1}{3}$或 1<x<3 或 x>5．

则|f（x）|>1 的解集为（－∞，$\frac{1}{3}$）∪（1，3）∪（5，+∞）．



【点评】本题考查绝对值函数的图象和不等式的解法，注意运用分段函数的图象的画法和分类讨论思想方法，考查运算能力，属于基础题．