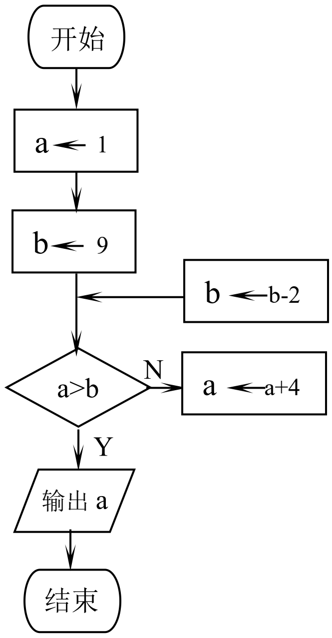
2016年江苏数学高考试题答案

填空题：每小题5分, 共70分.

1.已知集合 $A=\{-1,2,3,6\}, B=\{x\mid -2<x<3\}$, 则 $A\cap B=$ {-1，2}.

2.复数 $z=(1+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$, 其中 i 为虚数单位，则 z 的实部是 5.



3.在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{3}=1$ 的焦距是 $2\sqrt{10}$.

4.已知一组数据 4.7, 4.8, 5.1, 5.4, 5.5，则该组数据的方差是 0.1.

5.函数 $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ 的定义域是 [-3,1].

6.如图是一个算法的流程图，则输出的 a 的值是 9.

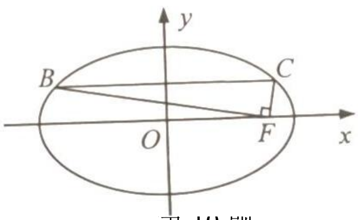
7.将一颗质地均匀的骰子（一种各个面上分别标有1，2，3，4，5，6个点的正方体玩具）先后抛掷2次，则出现向上的点数之和小于10的概率是 $\frac{5}{6}$.

8.已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，S_n 是其前 n 项和.若 $a_1+a_2^2=-3$，$S_5=10$，则 a_9 的值是 20.

9.定义在区间 $[0,3\pi]$ 上的函数 $y=\sin 2x$ 的图象与 $y=\cos x$ 的图象的交点个数是 7.

解：$Y=2\sin x\cos x=\cos x$，$\cos x=0$,或 $\sin x=\frac{1}{2}$，$x=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$；$\frac{5\pi}{2}$；$\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$；$\frac{13\pi}{6},\frac{17\pi}{6}$,

10.如图，在平面直角坐标系 xOy 中，F 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点，直线 $y=\frac{b}{2}$ 与椭圆交于 B，C 两点，且 $\angle BFC=90^\circ$，则该椭圆的离心率是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.



第10题

解：设 $C(m,\frac{b}{2})$, $B(-m,\frac{b}{2})$ 。B 在椭圆上：$b^2m^2+a^2\times(\frac{b}{2})^2=a^2b^2$, ①

$\angle BFC=90^\circ$ ：$CF^2+BF^2=4m^2$, $(m-c)^2+(\frac{b}{2})^2+(-m-c)^2+(\frac{b}{2})^2=4m^2$ ②

由①②消去 m, 又 $b^2=a^2-c^2$, 解得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

11.设 $f(x)$ 是定义在 R 上且周期为2的函数，在区间 $[-1,1)$ 上，$f(x)=\begin{cases}x+a, -1\le x<0,\\ \left|\frac{2}{5}-x\right|, 0\le x<1,\end{cases}$ 其中

$a\in\mathbf{R}$. 若 $f(-\frac{5}{2})=f(\frac{9}{2})$，则 f（$5a$）的值是__$-\frac{2}{5}$_____.

解：$f(-\frac{5}{2})=f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}+a$, $f(\frac{9}{2})=f(\frac{1}{2})=|\frac{2}{5}-\frac{1}{2}|=\frac{1}{10}$. $-\frac{1}{2}+a=\frac{1}{10}$, $a=\frac{3}{5}$

$f(5a)=f(3)=f(1)=f(-3)=f(-1)=-1+\frac{3}{5}=-\frac{2}{5}$

12. 已知实数 x，y 满足 $\begin{cases}x-2y+4\geq 0\\2x+y-2\geq 0\\3x-y-3\leq 0\end{cases}$，则 x^2+y^2 的取值范围是_$[\frac{4}{5}$，13]______.

解：将不等式组改写为 $y\leqslant\frac{1}{2}x+2$, $y\geqslant -2x+2$, $y\leqslant 3x-3$ 。

可行域为图中三条直线所围成的三角形区域（含边界）。

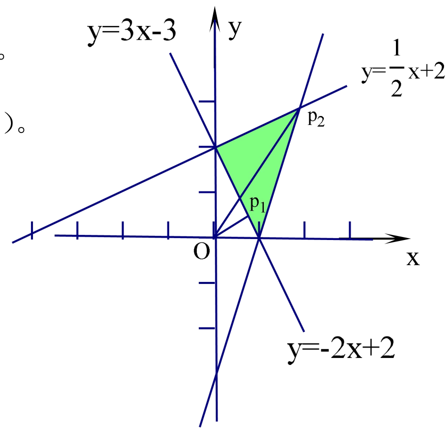
设满足条件的点为 P（x,y），则 $x^2+y^2=OP^2$.

OP 的最小值为 O 到直线 2x+y-2=0 的距离 OP_1，

OP 的最大值为 O 到点 P_2 的距离 OP_2，

$OP_1=\frac{|-2\times 0+0-2|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，　$OP_1^2=\frac{4}{5}$

解得点 P_2 的坐标为（2，3），$OP_2^2=13$



13.如图，在△ABC 中，D 是 BC 的中点，E，F 是 AD 上的两个三等分点，$\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{CA}=4$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$，则 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}$ 的值是__$\frac{7}{8}$_____.

解：∴ $\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{CD}$

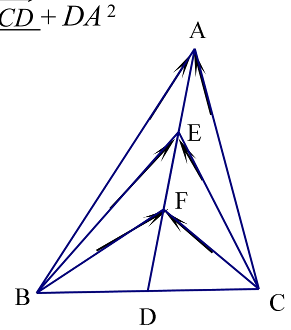
∴ $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{CA}=(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA})(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})=\overrightarrow{BD}\bullet\overrightarrow{CD}+\underline{\overrightarrow{BD}\bullet\overrightarrow{DA}}+\underline{\overrightarrow{DA}\bullet\overrightarrow{CD}}+\overrightarrow{DA}^2$

$=-\overrightarrow{BD}^2+\overrightarrow{DA}^2=4$

$\overrightarrow{BF}\bullet\overrightarrow{CF}=(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF})(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF})=(\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DA})(-\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DA})$

$=-\overrightarrow{BD}^2+\frac{1}{9}\overrightarrow{DA}^2=-1$

解得 $\overrightarrow{DA}^2=\frac{45}{8}$



∴ $\overrightarrow{BE}\bullet\overrightarrow{CE}=(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE})(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE})(\overrightarrow{BD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DA})(-\overrightarrow{BD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DA})=-\overrightarrow{BD}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{DA}^2$

$=-\overrightarrow{BD}^2+\frac{1}{9}\overrightarrow{DA}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}=-1+\frac{1}{3}\times\frac{45}{8}=\frac{7}{8}$

14.在锐角三角形 ABC 中，若 $\sin A=2\sin B\sin C$，则 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值是__8_____.

解：由已知 sin$A$=2sin$B$sin$C$，得 sin(B+C)=2sin$B$sin$C$， sinBcosC+cosBsinC=2sin$B$sin$C$，

$\frac{\cos C}{\sin C}+\frac{\cos B}{\sin B}$=2， $\frac{1}{\tan C}+\frac{1}{\tan B}$=2， tanB+tanC=2 tanBtanC

∵A，B，C 都是锐角，

∴tanAtanBtanC= -tan(B+C) tanBtanC= -$\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}$×tanBtanC=$\frac{2\tan^2 B\tan^2 C}{\tan B\tan C-1}$>0

∴tanBtanC>1. 令 tanBtanC=m>1，则 tanAtanBtanC=$\frac{2m^2}{m-1}$。

问题变为求$\frac{2m^2}{m-1}$ （m>1） 最小值。方法多样。令 M=$\frac{2m^2}{m-1}$。

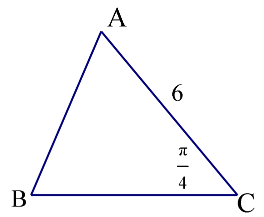
法一 M=$\frac{2m^2}{m-1}=\frac{2m^2-2m+2m-2+2}{m-1}=2m+2+\frac{2}{m-1}$=2(m-1)+4+$\frac{2}{m-1}$≥8， 当 m=2 时，取等号，故 M 最小值为 8。

法二 M=$\frac{2m^2}{m-1}=\frac{2}{-\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m}}$， 当$\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$，即 m=2 时，M 最小值为 8。

法三 判别式法 m M -M=2m^2， 2m^2 - M m +M=0， ⊿=M^2-8M≥0， M≥8,

M=8 时，方程 2m^2 - M m +M=0,为 m^2-4m+4=0， m=2,符合 m≥1,∴M 最小值为 8。

二、解答题 （本大题共 6 小题，共 90 分）



15.（本小题满分 14 分）在△ABC 中，AC=6，$\cos B=\frac{4}{5}$，$C=\frac{\pi}{4}$.

（1）求 AB 的长； （2）求 $\cos(A-\frac{\pi}{6})$ 的值.

解：（1）∵cosB=$\frac{4}{5}$,∴B 为锐角，∴sinB=$\frac{3}{5}$. 据正弦定理有$\frac{AB}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{AC}{\sin B}$，

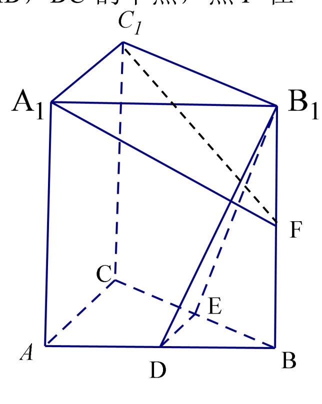
∴AB=6×$\frac{\sqrt{2}}{2}\div\frac{3}{5}$=5$\sqrt{2}$。

（2）cosA= - cos(B+C)=sinBsinC-cosBcosC=$\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$

sinA=$\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$

∴ cos(A-$\frac{\pi}{6}$)=cosAcos$\frac{\pi}{6}$+sinAsin$\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{2}}{10}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{7\sqrt{2}-\sqrt{6}}{20}$

16.(本小题满分 14 分)如图，在直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，D，E 分别为 AB，BC 的中点，点 F 在侧棱 B_1B 上，且 $B_1D\perp A_1F$， $A_1C_1\perp A_1B_1$.



求证：（1）直线 DE∥平面 A_1C_1F；

（2）平面 B_1DE⊥平面 A_1C_1F.

证明（1）∵D，E 分别为 AB，BC 的中点，

∴DE∥AC∥A_1C_1,

$A_1C_1\subseteq$平面A_1C_1F;，DE 在平面A_1C_1F;外，∴直线DE∥平面A_1C_1F;。

（2）已知$B_1D\perp A_1F$。 ①

∵$A_1C_1\perp A_1B_1$, $A_1C_1\perp A_1A_1$，∴$A_1C_1\perp$平面ABB_1A_1，

∴$A_1C_1\perp B_1D$。 ②

A_1F，A_1C_1是平面A_1C_1F内二相交直线，

据①②得$B_1D\perp$平面A_1C_1F。

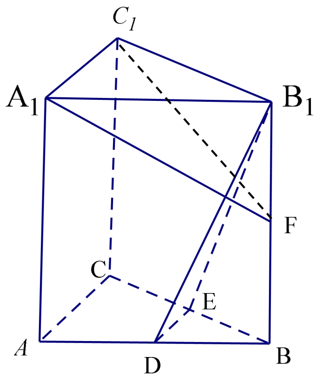
平面B_1DE经过B_1D， ∴平面$B_1DE\perp$平面A_1C_1F。

[亦可证明$B_1D\perp DE$，从而$B_1D\perp A_1C_1$，又$B_1D\perp A_1F$，

∴$B_1D\perp$平面A_1C_1F。∴平面$B_1DE\perp$平面A_1C_1F。

下面证明$B_1D\perp DE$：直角⊿B_1BD，⊿BDE

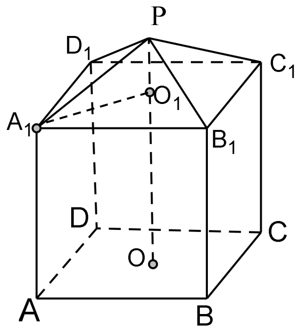
$B_1D^2+DE^2=$（$\underline{DB^2}+\boldsymbol{BB_1^2}$）$+DE^2=$[（$\underline{BE^2-DE^2}$）+（$\boldsymbol{B_1E^2-BE^2}$）]$+DE^2=B_1E^2$，∴$B_1D\perp DE$。]



17.（本小题满分 14 分）现需要设计一个仓库，它由上下两部分组成，上部分的形状是正四棱锥$P-A_1B_1C_1D_1$，下部分的形状是正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$（如图所示），并要求正四棱柱的高 PO 是正四棱锥的高PO_1的四倍.

(1) 若$AB=6m, PO_1=2m$,则仓库的容积是多少？

(2) 若正四棱柱的侧棱长为 6m,则当PO_1为多少时，仓库的容积最大？



解（1）容积为下部正四棱柱的容积与上部正四棱锥的容积的和=

$6^2\times4\times2+\frac{1}{3}\times6^2\times2=6^2\times2\times$（$4\frac{1}{3}$）$=312$（$m^2$）

（2）设PO_1=x m.。则$A_1O_1=\sqrt{6^2-x^2}$，(0<x<6)

$A_1B_1=\sqrt{2\times(6^2-x^2)}$

$V=2\times(36-x^2)\times4x+\frac{1}{3}\times2\times(36-x^2)x=2\times(36-x^2)x\times(4+\frac{1}{3})$

$=\frac{26}{3}(-x^3+36x)$

$V'=-26x^2+12\times26=26\times(-x^2+12)$. $x=2\sqrt{3}$时，$V'=0$

当$0<x<2\sqrt{3}$时，$V'>0$, V 是单调增函数，$2\sqrt{3}<x<6$时，$V'<0$, V 是单调减函数，所以当$x=2\sqrt{3}$ m 时，库容 V 取得最大值。

18. （本小题满分 16 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知以 M 为圆心的圆 M:$x^2+y^2-12x-14y+60=0$ 及其上一点 A(2，4)。

（1）设圆 N 与 x 轴相切，与圆 M 外切，且圆心 N 在直线 x=6 上，求圆 N 的标准方程;

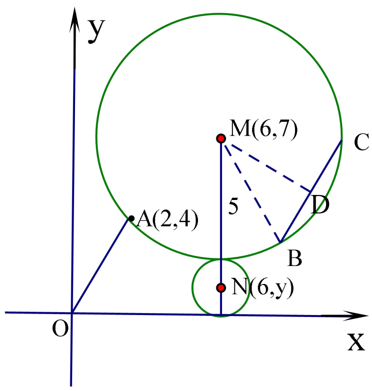
（2）设平行于 OA 的直线 l 与圆 M 相交于 B、C 两点，且 BC=OA，求直线 l 的方程;

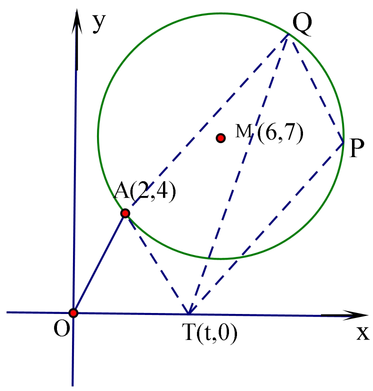
（3）设点 T（t，o）满足：存在圆 M 上的两点 P 和 Q，使得 $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$ 求实数 t 的取值范围。

解：（1）M：$(x-6)^2+(y-7)^2=25$，圆心 M(6，7)

∵圆 N 的圆心 N 在直线 x=6 上，设 N 圆圆心为 N(6，y)，又圆 N 与 x 轴相切，与圆 M 外切。∴2y=7-5，　y=1　。故圆 N 的标准方程为 ：$(x-6)^2+(y-1)^2=1$.

（2）





$BC=OA=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

∵BC∥OA，∴$k_{BC}=k_{OA}=2$。设直线 BC 的方程为 y=2x+b，作 MD⊥BC 于 D。MD=5，BD=$\sqrt{5}$.

∴MD=$\sqrt{MB^2-BD^2}=\sqrt{5^2-5}=2\sqrt{5}$

又 MD=$\dfrac{|2\times6-7+b|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5}$，　$|5+b|=10$，　∴b=5，-15

∴直线 *l* 的方程有两解：y=2x+5 或 y=2x-15。

（3）T(t，0)，A(2，4)．设 P(x_1,y_1)，Q(x_2,y_2)。

由 $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$ ．得 $(2-t,4)+(x_1-t,y_1)=(x_2-t,y_2)$，　于是 $2-t+x_1-t=x_2-t$ 且 $4+y_1=y_2$，

∴$x_2=x_1-t+2$，　且 $y_2=y_1+4$。∵点 Q(x_2,y_2)在圆 M 上，∴$(x_1-t+2-6)^2+(y_1+4-7)^2=25$，

即$(x_1-t-4)^2+(y_1-3)^2=25$，这说明点 P(x_1,y_1)在以点 N(t+4，3)为圆心，5 为半径的圆 N 上。

又点 P(x_1,y_1)在以点 M(6，7)为圆心，5 为半径的圆 M 上。即点 P(x_1,y_1)为圆 M 与圆 N 的交点。∴$5-5\le|MN|\le5\pm5$，∴$0\le(t+4-6)^2+(3-7)^2\le100$，$(t-2)^2\le84$，

∴　$2-2\sqrt{21}\le t\le 2+2\sqrt{21}$

18（本小题满分 16 分）已知函数 $f(x)=a^x+b^x(a>0,b>0,a\ne1,b\ne1)$

（1）设 a=2，b=$\frac{1}{2}$，

①求方程 $f(x)$ =2 的根。

②若对任意 $x\in R$ 不等式 $f(2x)\ge m\,f(x)-6$ 恒成立，求实数 m 的最大值。

（2）若 $0<a<1,b>1$，函数 $g(x)=f(x)-2$ 有且只有 1 个零点，求 ab 的值。

解：(1)①方程 $f(x)$=2，即方程 $2^x+(\frac{1}{2})^x=2$，$2^{2x}-2\times2^x+1=0$，$(2^x-1)=0$，∴x=0.

② $2^{2x}+2^{-2}\geqslant m(2^x+2^{-x})-6$，$(2^{2x}+2^{-2})^2-2\geqslant m(2^x+2^{-x})-6$，

$m\leqslant(2^x+2^{-x})+\frac{4}{2^x+2^{-x}}$，　而 $(2^x+2^{-x})+\frac{4}{2^x+2^{-x}}\geqslant2\times2=4$，

当 $2^x+2^{-x}=\frac{4}{2^x+2^{-x}}$，$2^x+2^{-x}=2$，x=0 时，取等号，故 m≤4，即 m 最大是 4。

20.（本小题满分 16 分）记 U={1.2,—，100}.对数列 $\{a_n\}$ $(n\in N^*)$ 和 U 的子集 T，若 T= ϕ

定义 S_r=0；若 T=$\{t_1, t_2, \cdots\cdots, t_k\}$，定义 $s_T=\{a_{t_1}, a_{t_2}+\cdots+a_{t_k}\}$

例如 $T=\{1,3,66\}$ 时 $s_T=a_1+a_3+a_{66}$. 现设 $\{a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列，且当 T={2。4}时，

$S_T=30$ 。

（1）求数列 $\{a_n\}$的通项公式；

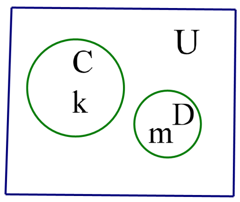
（2） 对任意正整数 $k(1\le k\le100)$，若 $T\subseteq\{1,2,\cdots,k\}$。求证：$S_T<a_{k+1}$

（3）设 $C\subseteq U, D\subseteq U, S_C\ge S_D$,求证：$S_C+S_{C\cap D}\ge2S_D$.

解：（1）$S_T=30=a_2+a_4=a_1\times3+a_1\times3^3=30a_1$，∴$a_1=1$，$a_n=3^{n-1}$.

(2) $S_T\leqslant a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k=1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{k-1}=\frac{3^k-1}{2}<3^k$，∴$S_T<a_{k+1}$.

(3) 1)若 C∩D=ϕ，设 C，D 中最大的数分别是 k ，m .



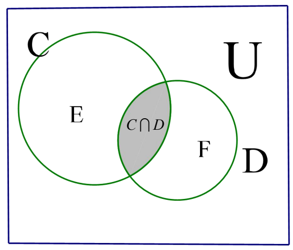
已知 $S_C\geqslant S_D$。由（2）知 $S_C\leqslant a_{k+1}$,

$\therefore 3^{m-1}=a_m\leqslant S_d\leqslant S_C<a_{k+1}=3^k$，∴m-1<k, m≤k,∵m≠k,∴m<k, m≤k-1,

$\therefore S_D\leqslant1+2+\cdots\cdots+3^{m-1}=\frac{3^m-1}{2}\leqslant\frac{3^{k-1}-1}{2}=\frac{a_k-1}{2}\leqslant\frac{S_C-1}{2}$

$\therefore S_C\geqslant2S_D+1$，$\therefore S_C>2S_D$.

2) 若 C ∩D≠ϕ



①若 C=D，则 $S_C+S_{C\cap D}=2S_C\geqslant2S_D$。

②若 C≠D，设 E=C-$C\cap D$，F=D-$C\cap D$，∴E∩F=ϕ，

由 1）知　$S_E>2S_F$。

$\therefore S_C+S_{C\cap D} = S_E+2S_{C\cap D} > 2S_F+2S_{C\cap D} = 2S_D$.

3)综合 1）2）得 $S_C+S_{C\cap D} \geqslant 2S_D$ 。

数学Ⅱ（附加题）

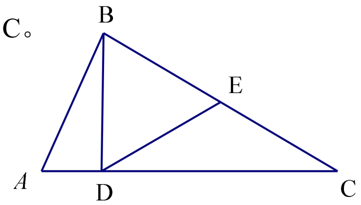
21.【选做题】本题包括 A、B、C、D 四小题，请选定其中两小题，若多做，则按作答的前两小题评分.

A.【选修 4—1 几何证明选讲】(本小题满分 10 分）

如图，在△*ABC* 中，∠*ABC*=90°，*BD*⊥*AC*，*D* 为垂足，*E* 是 *BC* 的中点，求证：∠*EDC*=∠*ABD*.

证明：∵E 为直角⊿BDC 的 BC 边上中点，∴ED=EC，∠EDC=∠C。

∠ABD 与∠C 都是∠A 的余角，∠EDC=∠C=∠ABD。



B.【选修 4—2：矩阵与变换】(本小题满分 10 分）

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}$，矩阵 *B* 的逆矩阵 $B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，求矩阵 *AB*.

解：设 B=$\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$，则 BB^{-1}=$\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & -\frac{1}{2}a+2c\\ b & -\frac{1}{2}b+2d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\therefore$ a=1, b=0, $-\frac{1}{2}a+2c=0$，$-\frac{1}{2}b+2d=1$，解得 c=$\frac{1}{4}$，d=$\frac{1}{2}$．∴B=$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

AB=$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{5}{4}\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

C.【选修 4—4：坐标系与参数方程】(本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 *xOy* 中，已知直线 *l* 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}t\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（*t* 为参数)，椭圆 *C* 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）.设直线 *l* 与椭圆 *C* 相交于 *A*，*B* 两点，求线段 *AB*

的长.

解：椭圆 C 的普通方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$，将直线 l 的参数方程 $\begin{cases} x=1+\frac{1}{2}t \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ 代入 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$，

得

$$(1+\frac{1}{2}t)^2+\frac{(\frac{\sqrt{3}t}{2})^2}{4}=1$$，化简为 $7t^2+16t=0$，解得 $t=-\frac{16}{7}$，$t=0$。

$\therefore$ $AB=|-\frac{16}{7}-0|=\frac{16}{7}$

D.设 $a>0$，$|x-1|<\frac{a}{3}$，$|y-2|<\frac{a}{3}$，求证：$|2x+y-4|<a$.

解：$|2x-2|<\frac{2a}{3}$，$\therefore |2x+y-4|\leq|2x-2|+|y-2|<\frac{2a}{3}+\frac{a}{3}=a$.

【必做题】第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分．请在答题卡指定区域内作答．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

22．（本小题满分 10 分）

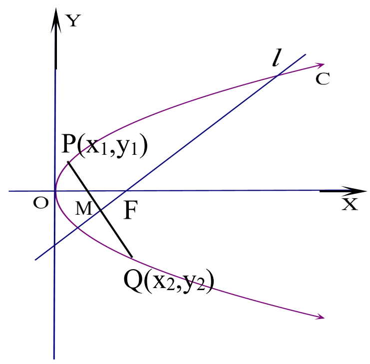
如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l：$x-y-2=0$，抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$.

（1）若直线 l 过抛物线 C 的焦点，求抛物线 C 的方程；

（2）已知抛物线 C 上存在关于直线 l 对称的相异两点 P 和 Q.

①求证：线段 PQ 的中点坐标为（$2-p$，$-p$）；

②求 p 的取值范围.



解（1）C 的焦点 $F(\frac{p}{2},0)$在直线 l：$x-y-2=0$ 上：

$\frac{p}{2}-0-2=0$，$p=4$，$\therefore$抛物线 C 的方程是 $y^2=8x$。

（2）①设 $P(x_1,y_1)$．$Q(x_2,y_2)$．$\because$P，Q 关于直线 l 对称，$\therefore PQ\perp l$，

线段 PQ 为直线 l 平分，设 PQ 中点 M（m,n），$\therefore$M 在 l 上，则 $n=m-2$.

由 $y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$，相减得 $y_1^2-y_2^2=2p(x_1-x_2)$，$\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1-x_2}=2p$，$k_{PQ}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-k_l=-1$，

$\therefore y_1+y_2=-2p$，$\therefore n=\frac{y_1+y_2}{2}=-p$，$m=n+2=2-p$。即线段 PQ 的中点坐标为（$2-p$，$-p$）。

②PQ 方程为 $y-n=-(x-m)$，即 $y=-x+m+n$，即 $y=-x+2-2p$．$\because$PQ 与 C 必交于 P，Q 相异两点，$\therefore$由 PQ 与 C 联立所得二次方程 $(-x+2-2p.)^2=2px$ 一定有相异二实根，将该方程化为标准形式：$x^2-2(2-p)x+(2-2p)^2=0$，

其判别式 $\Delta=4(2-p)^2-4(2-2p)^2>0$，$p(4-3p)>0$，$\therefore 0<p<\frac{3}{4}$

23.（本小题满分 10 分）

（1）求 $7C_6^3-4C_7^4$ 的值；

（2）设 m，$n\in \mathbf{N}^*$，$n\geqslant m$，求证：

（m+1）C_m^m+（m+2）C_{m+1}^m+（m+3）C_{m+2}^m+…+nC_{n-1}^m+（n+1）C_n^m=（m+1）C_{n+2}^{m+2}．

解：（1）$7C_6^3-4C_7^4=7\times\dfrac{6\times5\times4}{3\times2}-4\times\dfrac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2}=140-140=0$。

证一 $\because (m+k)C_{m+k-1}^m=\dfrac{(m+k)(m+k-1)!}{m!(k-1)!}=(m+1)\times\dfrac{(m+k)!}{(m+1)!(k-1)!}=(m+1)C_{m+k}^{m+1}$

(k=1.2.……, n-m, n-m+1)

$\therefore$左边$=(m+1)(C_{m+1}^{m+1}+C_{m+2}^{m+1}+C_{m+3}^{m+1}+\cdots\cdots+C_n^{m+1}+C_{n+1}^{m+1})$

$=(m+1)(C_{m+2}^{m+2}+C_{m+2}^{m+1}+C_{m+3}^{m+1}+\cdots\cdots+C_n^{m+1}+C_{n+1}^{m+1})$

$=(m+1)(C_{m+3}^{m+2}+C_{m+3}^{m+1}+\cdots\cdots+C_n^{m+1}+C_{n+1}^{m+1})$

$=(m+1)(C_{m+4}^{m+2}+C_{m+4}^{m+1}+\cdots\cdots+C_n^{m+1}+C_{n+1}^{m+1})$

= ……

$=(m+1)C_{n+2}^{m+2}$=右边。 命题得证。

证二 用数学归纳法

令 n=m+k (k∈N)

即证 $(m+1)C_m^m+(m+2)C_{m+1}^m+(m+3)C_{m+2}^m+\cdots\cdots+(m+k)C_{m+k-1}^m+(m+k+1)C_{m+k}^m$

$=(m+1)C_{m+k+2}^{m+2}$

k=0, m=n 时，左边$=(m+1)C_m^m=(m+1)$，右边$=(m+1)C_{m+2}^{m+2}=(m+1)$，左边=右边，命题成立。

k>0,,n>m 时，当 k=1 时，左边$=(m+1)C_m^m+(m+2)C_{m+1}^m=(m+1)+(m+2)(m+1)=(m+1)(m+3)$

右边$=(m+1)C_{m+3}^{m+2}=(m+1)C_{m+3}^1=(m+1)(m+3)$

左边=右边，命题成立。

假设当 k=s (s∈N*), n=m+s 时，命题成立，即

$(m+1)C_m^m+(m+2)C_{m+1}^m+(m+3)C_{m+2}^m+\cdots\cdots+(m+s)C_{m+s-1}^m+(m+s+1)C_{m+s}^m$

$=(m+1)C_{m+s+2}^{m+2}$ ，

则当 k=s+1, n=m+s+1 时，

$$(m+1)C_{m}^{m}+(m+2)C_{m+1}^{m}+(m+3)C_{m+2}^{m}+\cdots\cdots+(m+s)C_{m+s-1}^{m}+(m+s+1)C_{m+s}^{m}$$

$$+(m+s+2)C_{m+s+1}^{m}=(m+1)C_{m+s+2}^{m+2}+(m+s+2)C_{m+s+1}^{m}$$

$$=\frac{(m+1)(m+s+2)!}{(m+2)!s!}+\frac{(m+s+2)(m+s+1)!}{m!(s+1)!}$$

$$=\frac{(m+s+2)!}{m!s!}\left(\frac{1}{m+2}+\frac{1}{s+1}\right)$$

$$=\frac{(m+s+2)!}{m!s!}\times\frac{m+s+3}{(m+2)(s+1)}=\frac{(m+1)(m+s+3)!}{(m+2)!(s+1)!}$$

$=(m+1)C_{m+s+3}^{m+2}$ =右边。命题亦成立。

综上所述，命题得证。