2016年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理）（北京卷）参考答案

一、选择题（共8小题，每小题5分，共40分）

（1）C　　（2）C　　（3）B　　（4）D

（5）C　　（6）A　　（7）A　　（8）B

二、填空题（共6小题，每小题5分，共30分）

（9）-1　　（10）60

（11）2　　（12）6

（13）2　　（14）2　$(-\infty,-1)$

三、解答题（共6小题，共80分）

（15）（共13分）

解：（Ⅰ）由余弦定理及题设得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{2}ac}{2ac}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又因为 $0<\angle B<\pi$，所以 $\angle B=\dfrac{\pi}{4}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $\angle A+\angle C=\dfrac{3\pi}{4}$.

$\sqrt{2}\cos A+\cos C=\sqrt{2}\cos A+\cos(\dfrac{3\pi}{4}-A)$

$=\sqrt{2}\cos A-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin A=\cos(A-\dfrac{\pi}{4})$,

因为 $0<\angle A<\dfrac{3\pi}{4}$，所以当 $\angle A=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\sqrt{2}\cos A+\cos C$ 取得最大值 1.

（16）（共13分）

解：（Ⅰ）由题意知，抽出的 20 名学生中，来自 C 班的学生有 8 名. 根据分层抽样方法，C 班的学生人数估计为 $100\times\dfrac{8}{20}=40$.

（Ⅱ）设事件 A_i 为“甲是现有样本中 A 班的第 i 个人”，$i=1,2,\cdots,5$，

事件 C_j 为“乙是现有样本中 C 班的第 j 个人”，$j=1,2,\cdots,8$，

由题意可知，$P(A_i)=\dfrac{1}{5}$，$i=1,2,\cdots,5$；$P(C_j)=\dfrac{1}{8}$，$j=1,2,\cdots,8$.

$P(A_iC_j)=P(A_i)P(C_j)\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{40}$, $i=1,2,\cdots,5$, $j=1,2,\cdots,8$.

设事件 E 为“该周甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长”. 由题意知，

$E=A_1C_1\cup A_1C_2\cup A_2C_1\cup A_2C_2\cup A_2C_3\cup A_3C_1\cup A_3C_2\cup A_3C_3\cup$

$A_4C_1\cup A_4C_2\cup A_4C_3\cup A_5C_1\cup A_5C_2\cup A_5C_3\cup A_5C_4$

因此

$$P(E)=P(A_1C_1)+P(A_1C_2)+P(A_2C_1)+P(A_2C_2)+P(A_2C_3)+P(A_3C_1)+P(A_3C_2)+P(A_3C_3)$$

$+P(A_4C_1)+P(A_4C_2)+P(A_4C_3)+P(A_5C_1)+P(A_5C_2)+P(A_5C_3)+P(A_5C_4)=15\times\dfrac{1}{40}=\dfrac{3}{8}$（III）$\mu_1<\mu_0$.

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$， $AB\perp AD$，

所以 $AB\perp$平面 PAD .

所以 $AB\perp PD$.

又因为 $PA\perp PD$，

所以 $PD\perp$平面 PAB .

（Ⅱ）取 AD 的中点 O，连结 PO,CO .

因为 $PA=PD$，所以 $PO\perp AD$.

又因为 $PO\subset$平面 PAD ，平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，

所以 $PO\perp$平面 $ABCD$.

因为 $CO\subset$平面 $ABCD$，所以 $PO\perp CO$.

因为 $AC=CD$，所以 $CO\perp AD$.

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$. 由题意得，

$A(0,1,0),B(1,1,0),C(2,0,0),D(0,-1,0),P(0,0,1)$.

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$ ，则

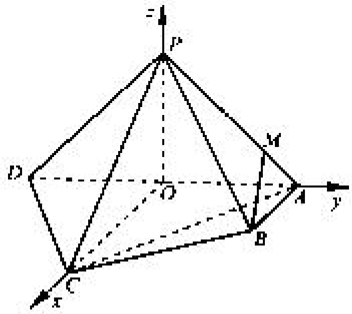
$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}-y-z=0,\\ 2x-z=0,\end{cases}$$

令 $z=2$ ，则 $x=1,y=-2$.

所以 $\vec{n}=(1,-2,2)$.

又 $\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$，所以 $\cos<\vec{n},\overrightarrow{PB}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\vec{n}||\overrightarrow{PB}|}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



（III）设 M 是棱 PA 上一点，则存在 $\lambda\in[0,1]$ 使得 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AP}$.

因此点 $M(0,1-\lambda,\lambda),\overrightarrow{BM}=(-1,-\lambda,\lambda)$.

因为 $BM\not\subset$ 平面 PCD，所以 BM // 平面 PCD 当且仅当 $\overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}=0$，

即 $(-1,-\lambda,\lambda)\cdot(1,-2,2)=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{4}$.

所以在棱 PA 上存在点 M 使得 BM // 平面 PCD，此时 $\dfrac{AM}{AP}=\dfrac{1}{4}$.

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=xe^{a-x}+bx$，所以 $f'(x)=(1-x)e^{a-x}+b$.

依题设，$\begin{cases}f(2)=2e+2,\\ f'(2)=e-1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2e^{a-2}+2b=2e+2,\\ -e^{a-2}+b=e-1,\end{cases}$

解得 $a=2,b=e$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=xe^{2-x}+ex$.

由 $f'(x)=e^{2-x}(1-x+e^{x-1})$ 即 $e^{2-x}>0$ 知，$f'(x)$ 与 $1-x+e^{x-1}$ 同号.

令 $g(x)=1-x+e^{x-1}$，则 $g'(x)=-1+e^{x-1}$.

所以，当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

故 $g(1)=1$ 是 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的最小值，

从而 $g(x)>0,x\in(-\infty,+\infty)$.

综上可知，$f'(x)>0$，$x\in(-\infty,+\infty)$，故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$.

（19）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由题意得$\begin{cases} \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \dfrac{1}{2}ab=1, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$ 解得 $a=2, b=1$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$A(2,0), B(0,1)$，

设 $P(x_0, y_0)$，则 $x_0^2+4y_0^2=4$.

当 $x_0 \neq 0$ 时，直线 PA 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0-2}(x-2)$.

令 $x=0$，得 $y_M=-\dfrac{2y_0}{x_0-2}$. 从而 $|BM|=|1-y_M|=\left|1+\dfrac{2y_0}{x_0-2}\right|$.

直线 PB 的方程为 $y=\dfrac{y_0-1}{x_0}x+1$.

令 $y=0$，得 $x_N=-\dfrac{x_0}{y_0-1}$. 从而 $|AN|=|2-x_N|=\left|2+\dfrac{x_0}{y_0-1}\right|$.

所以 $|AN|\cdot|BM|=\left|2+\dfrac{x_0}{y_0-1}\right|\cdot\left|1+\dfrac{2y_0}{x_0-2}\right|$

$=\left|\dfrac{x_0^2+4y_0^2+4x_0y_0-4x_0-8y_0+4}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}\right|=\left|\dfrac{4x_0y_0-4x_0-8y_0+8}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}\right|$

$=4$.

当 $x_0=0$ 时，$y_0=-1$，$|BM|=2, |AN|=2,$

所以 $|AN|\cdot|BM|=4$.

综上，$|AN|\cdot|BM|$ 为定值.

（20）（共 13 分）

解：（Ⅰ）$G(A)$ 的元素为 2 和 5.

（Ⅱ）因为存在 a_n 使得 $a_n>a_1$，所以 $\{i\in N^* \mid 2\le i\le N, a_i>a_1\}\neq\varnothing$.

记 $m=\min\{i\in N^*|2\le i\le N,a_i>a_1\}$，

则 $m\ge 2$，且对任意正整数 $k<m,a_k\le a_1<a_m$.

因此 $m\in G(A)$，从而 $G(A)\ne\varnothing$.

（Ⅲ）当 $a_N\le a_1$ 时，结论成立.

以下设 $a_N>a_1$.

由（Ⅱ）知 $G(A)\ne\varnothing$.

设 $G(A)=\{n_1,n_2,\cdots,n_p\},n_1<n_2<\cdots<n_p$，记 $n_0=1$.

则 $a_{n_0}<a_{n_1}<a_{n_2}<\cdots<a_{n_p}$.

对 $i=0,1,\cdots,p$，记 $G_i=\{k\in N^*|n_i<k\le N,a_k>a_{n_i}\}$.

如果 $G_i\ne\varnothing$，取 $m_i=\min G_i$，则对任何 $1\le k<m_i,a_k\le a_{n_i}<a_{m_i}$.

从而 $m_i\in G(A)$ 且 $m_i=n_{i+1}$.

又因为 n_p 是 $G(A)$ 中的最大元素，所以 $G_p=\varnothing$.

从而对任意 $n_p\le k\le n$，$a_k\le a_{n_p}$，特别地，$a_N\le a_{n_p}$.

对 $i=0,1,\cdots,p-1,a_{n_{i+1}-1}\le a_{n_i}$.

因此 $a_{n_{i+1}}=a_{n_{i+1}-1}+(a_{n_{i+1}}-a_{n_{i+1}-1})\le a_{n_i}+1$.

所以 $a_N-a_1\le a_{n_p}-a_1=\sum\limits_{i=1}^{p}(a_{n_i}-a_{n_{i-1}})\le p$.

因此 $G(A)$ 的元素个数 p 不小于 a_N-a_1.