2016年普通高等学校招生全国统一考试

数学(文)(北京卷)参考答案

一、选择题（共8小题，每小题5分，共40分）

（1）C　（2）A　（3）B　（4）D　（5）C　（6）B　（7）C　（8）B

二、填空题（共6小题，每小题5分，共30分）

（9）$\frac{\pi}{6}$　（10）2　（11）$\frac{3}{2}$　（12）1　2

（13）1　（14）16　29

三、解答题（共6小题，共80分）

（15）（共13分）

解：（I）等比数列$\left\{b_n\right\}$的公比$q=\frac{b_3}{b_2}=\frac{9}{3}=3$，

所以$b_1=\frac{b_2}{q}=1$，$b_4=b_3q=27$．

设等差数列$\left\{a_n\right\}$的公差为d．

因为$a_1=b_1=1$，$a_{14}=b_4=27$，

所以$1+13d=27$，即$d=2$．

所以$a_n=2n-1$（$n=1$，2，3，$\cdots$）．

（II）由（I）知，$a_n=2n-1$，$b_n=3^{n-1}$．

因此$c_n=a_n+b_n=2n-1+3^{n-1}$．

从而数列$\left\{c_n\right\}$的前n项和

$$S_n=1+3+\cdots+\left(2n-1\right)+1+3+\cdots+3^{n-1}$$

$$=\frac{n\left(1+2n-1\right)}{2}+\frac{1-3^n}{1-3}$$

$$=n^2+\frac{3^n-1}{2}.$$

（16）（共13分）

解：（I）因为 $f\left(x\right)=2\sin\omega x\cos\omega x+\cos 2\omega x$

$=\sin 2\omega x+\cos 2\omega x$

$=\sqrt{2}\sin\left(2\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

所以 $f\left(x\right)$ 的最小正周期 $\mathrm{T}=\dfrac{2\pi}{2\omega}=\dfrac{\pi}{\omega}$．

依题意，$\dfrac{\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=1$．

（II）由（I）知 $f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$．

函数 $y=\sin x$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$（$k\in\mathrm{Z}$）．

由 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le 2x+\dfrac{\pi}{4}\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，

得 $k\pi-\dfrac{3\pi}{8}\le x\le k\pi+\dfrac{\pi}{8}$．

所以 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\dfrac{3\pi}{8},k\pi+\dfrac{\pi}{8}\right]$（$k\in\mathrm{Z}$）．

（17）（共 14 分）

解：（I）由用水量的频率分布直方图知，

该市居民该月用水量在区间 $\left[0.5,1\right]$，$\left(1,1.5\right]$，$\left(1.5,2\right]$，$\left(2,2.5\right]$，$\left(2.5,3\right]$ 内的频率依次为 0.1，0.15，0.2，0.25，0.15．

所以该月用水量不超过 3 立方米的居民占 85%，用水量不超过 2 立方米的居民占 45%．

依题意，w 至少定为 3．

（II）由用水量的频率分布直方图及题意，得居民该月用水费用的数据分组与频率分布表：

组号	1	2	3	4	5	6	7	8
分组	$\left[2,4\right]$	$\left(4,6\right]$	$\left(6,8\right]$	$\left(8,10\right]$	$\left(10,12\right]$	$\left(12,17\right]$	$\left(17,22\right]$	$\left(22,27\right]$
频率	0.1	0.15	0.2	0.25	0.15	0.05	0.05	0.05

根据题意，该市居民该月的人均水费估计为：

$4\times0.1+6\times0.15+8\times0.2+10\times0.25+12\times0.15+17\times0.05+22\times0.05+27\times0.05$

$=10.5$（元）．

（18）（共 13 分）

解：（I）因为$PC \perp$平面$ABCD$，

所以$PC \perp DC$.

又因为$DC \perp AC$，

所以$DC \perp$平面PAC.

（II）因为$AB//DC$，$DC \perp AC$，

所以$AB \perp AC$.

因为$PC \perp$平面$ABCD$，

所以$PC \perp AB$.

所以$AB \perp$平面PAC.

所以平面$PAB \perp$平面PAC.

（III）棱PB上存在点F，使得$PA//$平面CEF．证明如下：

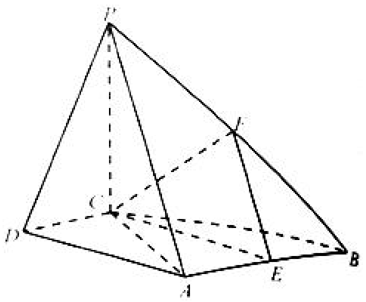
取PB中点F，连结EF，CE，CF.

又因为E为AB的中点，

所以$EF//PA$.

又因为$PA \not\subset$平面CEF，

所以$PA//$平面CEF.



（19）（共 14 分）

解：（I）由题意得，$a=2$，$b=1$.

所以椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

又$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，

所以离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（II）设 $P(x_0,y_0)$（$x_0<0$，$y_0<0$），则 $x_0^2+4y_0^2=4$.

又 $A(2,0)$，$B(0,1)$，所以，

直线 PA 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0-2}(x-2)$.

令 $x=0$，得 $y_M=-\dfrac{2y_0}{x_0-2}$，从而 $|BM|=1-y_M=1+\dfrac{2y_0}{x_0-2}$.

直线 PB 的方程为 $y=\dfrac{y_0-1}{x_0}x+1$.

令 $y=0$，得 $x_N=-\dfrac{x_0}{y_0-1}$，从而 $|AN|=2-x_N=2+\dfrac{x_0}{y_0-1}$.

所以四边形 ABNM 的面积

$$S=\frac{1}{2}|AN|\cdot|BM|$$

$$=\frac{1}{2}\left(2+\frac{x_0}{y_0-1}\right)\left(1+\frac{2y_0}{x_0-2}\right)$$

$$=\frac{x_0^2+4y_0^2+4x_0y_0-4x_0-8y_0+4}{2(x_0y_0-x_0-2y_0+2)}$$

$$=\frac{2x_0y_0-2x_0-4y_0+4}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}$$

$=2$.

从而四边形 ABNM 的面积为定值.

（20）（共 13 分）

解：（I）由 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，得 $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

因为 $f(0)=c$，$f'(0)=b$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=bx+c$.

（II）当 $a=b=4$ 时，$f(x)=x^3+4x^2+4x+c$，

所以 $f'(x)=3x^2+8x+4$.

令 $f'(x)=0$，得 $3x^2+8x+4=0$，解得 $x=-2$ 或 $x=-\frac{2}{3}$.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的情况如下：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	c	$\searrow$	$c-\frac{32}{27}$	$\nearrow$

所以，当 $c>0$ 且 $c-\frac{32}{27}<0$ 时，存在 $x_1\in(-4,-2)$，$x_2\in\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$，

$x_3\in\left(-\frac{2}{3},0\right)$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$.

由 $f(x)$ 的单调性知，当且仅当 $c\in\left(0,\frac{32}{27}\right)$ 时，函数 $f(x)=x^3+4x^2+4x+c$ 有三个不同零点.

（III）当 $\Delta=4a^2-12b<0$ 时，$f'(x)=3x^2+2ax+b>0$，$x\in(-\infty,+\infty)$，

此时函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 不可能有三个不同零点.

当 $\Delta=4a^2-12b=0$ 时，$f'(x)=3x^2+2ax+b$ 只有一个零点，记作 x_0.

当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 不可能有三个不同零点.

综上所述，若函数 $f(x)$ 有三个不同零点，则必有 $\Delta=4a^2-12b>0$.

故 $a^2-3b>0$ 是 $f(x)$ 有三个不同零点的必要条件.

当 $a=b=4$，$c=0$ 时，$a^2-3b>0$，$f(x)=x^3+4x^2+4x=x(x+2)^2$ 只有两个不同零点， 所以 $a^2-3b>0$ 不是 $f(x)$ 有三个不同零点的充分条件.

因此 $a^2-3b>0$ 是 $f(x)$ 有三个不同零点的必要而不充分条件.