

绝密★启用前

2020年普通高等学校招生全国统一考试

## 数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

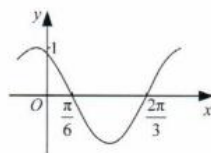
1. 设集合  $A = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$ ,  $B = \{x | 2 < x < 4\}$ , 则  $A \cup B =$   
A.  $\{x | 2 < x \leq 3\}$     B.  $\{x | 2 \leq x \leq 3\}$     C.  $\{x | 1 \leq x < 4\}$     D.  $\{x | 1 < x < 4\}$
2.  $\frac{2-i}{1+2i} =$   
A. 1    B. -1    C. i    D. -i
3. 6 名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者, 每名同学只去 1 个场馆, 甲场馆安排 1 名, 乙场馆安排 2 名, 丙场馆安排 3 名, 则不同的安排方法共有  
A. 120 种    B. 90 种    C. 60 种    D. 30 种
4. 日晷是中国古代用来测定时间的仪器, 利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间。把地球看成一个球 (球心记为  $O$ ), 地球上一点  $A$  的纬度是指  $OA$  与地球赤道所在平面所成角, 点  $A$  处的水平面是指过点  $A$  且与  $OA$  垂直的平面。在点  $A$  处放置一个日晷, 若晷面与赤道所在平面平行, 点  $A$  处的纬度为北纬  $40^\circ$ , 则晷针与点  $A$  处的水平面所成角为  
A.  $20^\circ$     B.  $40^\circ$     C.  $50^\circ$     D.  $90^\circ$



5. 某中学的学生积极参加体育锻炼, 其中有96%的学生喜欢足球或游泳, 60%的学生喜欢足球, 82%的学生喜欢游泳, 则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是
- A. 62%      B. 56%      C. 46%      D. 42%
6. 基本再生数  $R_0$  与世代间隔  $T$  是新冠肺炎的流行病学基本参数. 基本再生数指一个感染者传染的平均人数, 世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间. 在新冠肺炎疫情初始阶段, 可以用指数模型:  $I(t) = e^{rt}$  描述累计感染病例数  $I(t)$  随时间  $t$  (单位: 天) 的变化规律, 指数增长率  $r$  与  $R_0$ ,  $T$  近似满足  $R_0 = 1 + rT$ . 有学者基于已有数据估计出  $R_0 = 3.28$ ,  $T = 6$ . 据此, 在新冠肺炎疫情初始阶段, 累计感染病例数增加1倍需要的时间约为 ( $\ln 2 \approx 0.69$ )
- A. 1.2天      B. 1.8天      C. 2.5天      D. 3.5天
7. 已知  $P$  是边长为2的正六边形  $ABCDEF$  内的一点, 则  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$  的取值范围是
- A.  $(-2, 6)$       B.  $(-6, 2)$       C.  $(-2, 4)$       D.  $(-4, 6)$
8. 若定义在  $\mathbf{R}$  的奇函数  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  单调递减, 且  $f(2) = 0$ , 则满足  $xf(x-1) \geq 0$  的  $x$  的取值范围是
- A.  $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$       B.  $[-3, -1] \cup [0, 1]$   
C.  $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$       D.  $[-1, 0] \cup [1, 3]$

二、选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得5分, 有选错的得0分, 部分选对的得3分.

9. 已知曲线  $C: mx^2 + ny^2 = 1$ .
- A. 若  $m > n > 0$ , 则  $C$  是椭圆, 其焦点在  $y$  轴上
- B. 若  $m = n > 0$ , 则  $C$  是圆, 其半径为  $\sqrt{n}$
- C. 若  $mn < 0$ , 则  $C$  是双曲线, 其渐近线方程为  $y = \pm \sqrt{\frac{m}{n}}x$
- D. 若  $m = 0, n > 0$ , 则  $C$  是两条直线
10. 右图是函数  $y = \sin(\omega x + \varphi)$  的部分图像, 则  $\sin(\omega x + \varphi) =$
- A.  $\sin(x + \frac{\pi}{3})$   
B.  $\sin(\frac{\pi}{3} - 2x)$   
C.  $\cos(2x + \frac{\pi}{6})$   
D.  $\cos(\frac{5\pi}{6} - 2x)$



11. 已知  $a > 0$ ,  $b > 0$ , 且  $a + b = 1$ , 则

A.  $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

B.  $2^{a-b} > \frac{1}{2}$

C.  $\log_2 a + \log_2 b \geq -2$

D.  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$

12. 信息熵是信息论中的一个重要概念. 设随机变量  $X$  所有可能的取值为  $1, 2, \dots, n$ , 且

$$P(X=i) = p_i > 0 (i=1, 2, \dots, n), \sum_{i=1}^n p_i = 1, \text{ 定义 } X \text{ 的信息熵 } H(X) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i.$$

A. 若  $n=1$ , 则  $H(X)=0$

B. 若  $n=2$ , 则  $H(X)$  随着  $p_1$  的增大而增大

C. 若  $p_i = \frac{1}{n} (i=1, 2, \dots, n)$ , 则  $H(X)$  随着  $n$  的增大而增大

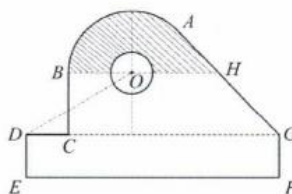
D. 若  $n=2m$ , 随机变量  $Y$  所有可能的取值为  $1, 2, \dots, m$ , 且  $P(Y=j) = p_j + p_{2m+1-j} (j=1, 2, \dots, m)$ , 则  $H(X) \leq H(Y)$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 斜率为  $\sqrt{3}$  的直线过抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点, 且与  $C$  交于  $A, B$  两点, 则  $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 将数列  $\{2n-1\}$  与  $\{3n-2\}$  的公共项从小到大排列得到数列  $\{a_n\}$ , 则  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

15. 某中学开展劳动实习, 学生加工制作零件, 零件的截面如图所示.  $O$  为圆孔及轮廓圆弧  $AB$  所在圆的圆心,  $A$  是圆弧  $AB$  与直线  $AG$  的切点,  $B$  是圆弧  $AB$  与直线  $BC$  的切点, 四边形  $DEFG$  为矩形,  $BC \perp DG$ , 垂足为  $C$ ,  $\tan \angle ODC = \frac{3}{5}$ ,  $BH \parallel DG$ ,  $EF = 12 \text{ cm}$ ,



$DE = 2 \text{ cm}$ ,  $A$  到直线  $DE$  和  $EF$  的距离均为  $7 \text{ cm}$ , 圆孔半径为  $1 \text{ cm}$ , 则图中阴影部分的面积为  $\underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$ .

16. 已知直四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长均为  $2$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ . 以  $D_1$  为球心,  $\sqrt{5}$  为半径的球面与侧面  $BCC_1B_1$  的交线长为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在① $ac = \sqrt{3}$ ，② $c \sin A = 3$ ，③ $c = \sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求  $c$  的值；若问题中的三角形不存在，说明理由。

问题：是否存在  $\triangle ABC$ ，它的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，且  $\sin A = \sqrt{3} \sin B$ ， $C = \frac{\pi}{6}$ ，\_\_\_\_\_？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

18. (12 分)

已知公比大于 1 的等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_2 + a_4 = 20$ ， $a_3 = 8$ 。

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式；

(2) 记  $b_m$  为  $\{a_n\}$  在区间  $(0, m]$  ( $m \in \mathbf{N}^*$ ) 中的项的个数，求数列  $\{b_m\}$  的前 100 项和  $S_{100}$ 。

19. (12 分)

为加强环境保护，治理空气污染，环境监测部门对某市空气质量进行调研，随机抽查了 100 天空气中的 PM2.5 和  $\text{SO}_2$  浓度 (单位： $\mu\text{g}/\text{m}^3$ )，得下表：

| PM2.5 \ SO <sub>2</sub> | [0, 50] | (50, 150] | (150, 475] |
|-------------------------|---------|-----------|------------|
| [0, 35]                 | 32      | 18        | 4          |
| (35, 75]                | 6       | 8         | 12         |
| (75, 115]               | 3       | 7         | 10         |

(1) 估计事件“该市一天空气中 PM2.5 浓度不超过 75，且  $\text{SO}_2$  浓度不超过 150”的概率；

(2) 根据所给数据，完成下面的  $2 \times 2$  列联表：

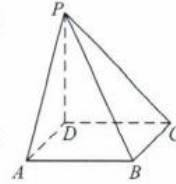
| PM2.5 \ SO <sub>2</sub> | [0, 150] | (150, 475] |
|-------------------------|----------|------------|
| [0, 75]                 |          |            |
| (75, 115]               |          |            |

(3) 根据 (2) 中的列联表，判断是否有 99% 的把握认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与  $\text{SO}_2$  浓度有关？

$$\text{附： } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad \begin{array}{c|cc} P(K^2 \geq k) & 0.050 & 0.010 & 0.001 \\ \hline k & 3.841 & 6.635 & 10.828 \end{array}$$

20. (12分)

如图, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面为正方形,  $PD \perp$  底面  $ABCD$ . 设平面  $PAD$  与平面  $PBC$  的交线为  $l$ .



(1) 证明:  $l \perp$  平面  $PDC$ ;

(2) 已知  $PD = AD = 1$ ,  $Q$  为  $l$  上的点, 求  $PB$  与平面  $QCD$  所成角的正弦值的最大值.

21. (12分)

已知函数  $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$ .

(1) 当  $a = e$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;

(2) 若  $f(x) \geq 1$ , 求  $a$  的取值范围.

22. (12分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 且过点  $A(2, 1)$ .

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 点  $M, N$  在  $C$  上, 且  $AM \perp AN$ ,  $AD \perp MN$ ,  $D$  为垂足. 证明: 存在定点  $Q$ , 使得  $|DQ|$  为定值.