（二）选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修4—4：坐标系与参数方程]（10分）

在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases} x=2-t-t^2, \\ y=2-3t+t^2 \end{cases}$（$t$为参数且$t\neq 1$），$C$与坐标轴交于$A$，$B$两点．

（1）求$|AB|$；

（2）以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，求直线AB的极坐标方程．

23．[选修4—5：不等式选讲]（10分）

设a，b，$c\in\mathbf{R}$，$a+b+c=0$，$abc=1$．

（1）证明：$ab+bc+ca<0$；

（2）用$\max\{a,b,c\}$表示a，b，c的最大值，证明：$\max\{a,b,c\}\geqslant\sqrt[3]{4}$．

理科数学试题参考答案

一、选择题

1．C　2．D　3．B　4．C　5．B　6．D

7．A　8．C　9．D　10．D　11．A　12．A

二、填空题

13．7　14．240　15．$\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$　16．②③

三、解答题

17．解：

（1）$a_2=5$，$a_3=7$．

猜想$a_n=2n+1$．由已知可得

$$a_{n+1}-(2n+3)=3[a_n-(2n+1)],$$

$$a_n-(2n+1)=3[a_{n-1}-(2n-1)],$$

……

$$a_2-5=3(a_1-3).$$

因为$a_1=3$，所以$a_n=2n+1$．

（2）由（1）得$2^n a_n=(2n+1)2^n$，所以

$$S_n=3\times2+5\times2^2+7\times2^3+\cdots+(2n+1)\times2^n. \quad ①$$

从而

$$2S_n=3\times2^2+5\times2^3+7\times2^4+\cdots+(2n+1)\times2^{n+1}. \quad ②$$

①－②得

$$-S_n=3\times2+2\times2^2+2\times2^3+\cdots+2\times2^n-(2n+1)\times2^{n+1}.$$

所以　$S_n=(2n-1)2^{n+1}+2$．

18．解：

（1）由所给数据，该市一天的空气质量等级为1，2，3，4的概率的估计值如下表：

空气质量等级	1	2	3	4
概率的估计值	0.43	0.27	0.21	0.09

（2）一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值为

$$\frac{1}{100}(100\times20+300\times35+500\times45)=350.$$

（3）根据所给数据，可得2×2列联表：

	人次≤400	人次>400
空气质量好	33	37
空气质量不好	22	8

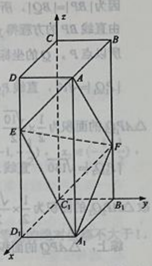
根据列联表得

$$K^2=\frac{100\times(33\times8-22\times37)^2}{55\times45\times70\times30}\approx5.820.$$

由于$5.820>3.841$，故有95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关．

19．解：

设 $AB=a$，$AD=b$，$AA_1=c$，如图，以 C_1 为坐标原点，$\overrightarrow{C_1D_1}$ 的方向为 x 轴正方向，建立空间直角坐标系 C_1-xyz．



（1）连结 C_1F，则 $C_1(0,0,0)$，$A(a,b,c)$，$E(a,0,\frac{2}{3}c)$，

$F(0,b,\frac{1}{3}c)$，$\overrightarrow{EA}=(0,b,\frac{1}{3}c)$，$\overrightarrow{C_1F}=(0,b,\frac{1}{3}c)$，得

$$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{C_1F},$$

因此 $EA\parallel C_1F$，即 A，E，F，C_1 四点共面，所以点 C_1 在平面 AEF 内．

（2）由已知得 $A(2,1,3)$，$E(2,0,2)$，$F(0,1,1)$，$A_1(2,1,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,-1,-1)$，$\overrightarrow{AF}=(-2,0,-2)$，$\overrightarrow{A_1E}=(0,-1,2)$，$\overrightarrow{A_1F}=(-2,0,1)$．

设 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$ 为平面 AEF 的法向量，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-y-z=0,\\ -2x-2z=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}_1=(-1,-1,1)$．

设 $\boldsymbol{n}_2$ 为平面 A_1EF 的法向量，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1F}=0,\end{cases}$ 同理可取 $\boldsymbol{n}_2=(\frac{1}{2},2,1)$．

因为 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，所以二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$．

20．解：

（1）由题设可得 $\dfrac{\sqrt{25-m^2}}{5}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，得 $m^2=\dfrac{25}{16}$，所以 C 的方程为

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{25}{16}}=1.$$

（2）设 $P(x_P,y_P)$，$Q(6,y_Q)$，根据对称性可设 $y_Q>0$，由题意知 $y_P>0$．

由已知可得 $B(5,0)$，直线 BP 的方程为 $y=-\dfrac{1}{y_Q}(x-5)$，所以 $|BP|=y_P\sqrt{1+y_Q^2}$，$|BQ|=\sqrt{1+y_Q^2}$．

因为 $|BP|=|BQ|$，所以 $y_P=1$，将 $y_P=1$ 代入 C 的方程，解得 $x_P=3$ 或 -3．

由直线 BP 的方程得 $y_Q=2$ 或 8．

所以点 P，Q 的坐标分别为 $P_1(3,1)$，$Q_1(6,2)$；$P_2(-3,1)$，$Q_2(6,8)$．

$|P_1Q_1|=\sqrt{10}$，直线 P_1Q_1 的方程为 $y=\dfrac{1}{3}x$，点 $A(-5,0)$ 到直线 P_1Q_1 的距离为 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，故 $\triangle AP_1Q_1$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{2}\times\sqrt{10}=\dfrac{5}{2}$．

$|P_2Q_2|=\sqrt{130}$，直线 P_2Q_2 的方程为 $y=\dfrac{7}{9}x+\dfrac{10}{3}$，点 A 到直线 P_2Q_2 的距离为 $\dfrac{\sqrt{130}}{26}$，故 $\triangle AP_2Q_2$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{130}}{26}\times\sqrt{130}=\dfrac{5}{2}$．

综上，$\triangle APQ$ 的面积为 $\dfrac{5}{2}$．

21．解：

（1）$f'(x)=3x^2+b$．

依题意得 $f'(\frac{1}{2})=0$，即 $\dfrac{3}{4}+b=0$．

故 $b=-\dfrac{3}{4}$．

（2）由（1）知 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{4}x+c$，$f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{4}$．

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\dfrac{1}{2}$ 或 $x=\dfrac{1}{2}$．

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的情况为：

x	$(-\infty,-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$c+\frac{1}{4}$	↘	$c-\frac{1}{4}$	↗

因为 $f(1)=f(-\frac{1}{2})=c+\frac{1}{4}$，所以当 $c<-\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 只有大于 1 的零点．

因为 $f(-1)=f(\frac{1}{2})=c-\frac{1}{4}$，所以当 $c>\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 只有小于 -1 的零点．

由题设可知$-\frac{1}{4}\leqslant c\leqslant\frac{1}{4}$.

当$c=-\frac{1}{4}$时，$f(x)$只有两个零点$-\frac{1}{2}$和1.

当$c=\frac{1}{4}$时，$f(x)$只有两个零点-1和$\frac{1}{2}$.

当$-\frac{1}{4}<c<\frac{1}{4}$时，$f(x)$有三个零点$x_1,x_2,x_3$，且$x_1\in(-1,-\frac{1}{2})$，$x_2\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$x_3\in(\frac{1}{2},1)$.

综上，若$f(x)$有一个绝对值不大于1的零点，则$f(x)$所有零点的绝对值都不大于1.

22．解:

（1）因为$t\neq1$，由$2-t-t^2=0$得$t=-2$，所以C与y轴的交点为$(0,12)$；由$2-3t+t^2=0$得$t=2$，所以C与x轴的交点为$(-4,0)$.

故$|AB|=4\sqrt{10}$.

（2）由（1）可知，直线AB的直角坐标方程为$\frac{x}{-4}+\frac{y}{12}=1$，将$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$代入，得直线$AB$的极坐标方程

$$3\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+12=0.$$

23．解:

（1）由题设可知，a，b，c均不为零，所以

$$\begin{aligned}ab+bc+ca&=\frac{1}{2}[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]\\&=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\\&<0.\end{aligned}$$

（2）不妨设$\max\{a,b,c\}=a$，因为$abc=1$，$a=-(b+c)$，所以$a>0$，$b<0$，$c<0$．由$bc\leqslant\frac{(b+c)^2}{4}$，可得$abc\leqslant\frac{a^3}{4}$，故$a\geqslant\sqrt[3]{4}$，所以$\max\{a,b,c\}\geqslant\sqrt[3]{4}$.