2020年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 A=$\left\{(x,y)\middle|x,y\in N^{*},y\geq x\right\}$，B=$\left\{(x,y)\middle|x+y=8\right\}$，则 $A\bigcap B$ 中元素个数为

A. 2

B. 3

C. 4

D. 6

2. 复数 $\dfrac{1}{1-3i}$ 的虚部是

A. $-\dfrac{3}{10}$

B. $-\dfrac{1}{10}$

C. $\dfrac{1}{10}$

D. $\dfrac{3}{10}$

3. 在一组样本数据中，1, 2, 3, 4 出现的频率分别为 p_1，p_2，p_3，p_4，且 $\sum\limits_{i=1}^{4}p_i=1$，则下面四种情形中，对应样本的标准差最大的一组是

A. $p_1=p_4=0.1, p_2=p_3=0.4$

B. $p_1=p_4=0.4, p_2=p_3=0.1$

C. $p_1=p_4=0.2, p_2=p_3=0.3$

D. $p_1=p_4=0.3, p_2=p_3=0.2$

4. Logistic 模型是常用数学模型之一，可应用于流行病学领域，有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数$I(\mathrm{t})$（t的单位：天）的 Logistic 模型：$I(t)=\dfrac{K}{1+e^{-0.23(t-53)}}$，其中$K$为的最大确诊病例数. 当$I\left(t^{*}\right)=0.95K$时，标志着已初步遏制疫情，则$t^{*}$约为（$\ln 19\approx 3$）

A. 60

B. 63

C. 66

D. 69

5. 设 O 为坐标原点，直线$x=2$与抛物线$C:y^{2}=2px(p>0)$交于 D，E 两点，若$OD\perp OE$，则 C 的焦点坐标为

A. $(\dfrac{1}{4},0)$

B. $(\dfrac{1}{2},0)$

C. $(1,0)$

D. $(2,0)$

6. 已知向量 a, b 满足$|a|=5$，$|b|=6$，$a\cdot b=-6$，则$\cos(a,a+b)=$

A. $-\dfrac{31}{35}$

B. $-\dfrac{19}{35}$

C. $\dfrac{17}{35}$

D. $\dfrac{19}{35}$

7. 在 ABC 中，$\cos C=\dfrac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$, 则$\cos B=$

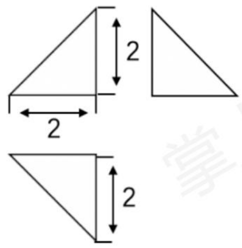
A. $\dfrac{1}{9}$

B. $\dfrac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

8. 右图为某几何体的三视图，则该几何体的表面积是



A. $6+4\sqrt{2}$

B. $4+4\sqrt{2}$

C. $6+2\sqrt{3}$

D. $4+2\sqrt{3}$

9. 已知 $2\tan\theta-\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=7$，则 $\tan\theta=$

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

10. 若直线 l 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 和圆 $x^2+y^2=\frac{1}{5}$ 都相切，则 l 的方程为

A. $y=2x+1$

B. $y=2x+\frac{1}{2}$

C. $y=\frac{1}{2}x+1$

D. $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

11. 设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\sqrt{5}$． P 是 C 上一点，且 $F_1P\perp F_2P$．若△ PF_1F_2 的面积为 4，则 a=

A. 1

B. 2

C. 4

D. 8

12. 已知$5^5<8^4$，$13^4<8^5$，设$a=\log_5 3$，$b=\log_8 5$，$c=\log_{13} 8$，则

A. $a<b<c$
B. $b<a<c$
C. $b<c<a$
D. $c<a<b$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 x, y 满足约束条件$\begin{cases} x+y\geq 0 \\ 2x-y\geq 0 \\ x\leq 1 \end{cases}$，则 z=3x+2y 的最大值为_____.

14. $(x^2+\frac{2}{x})^6$的展开式中常数项是______（用数字作答）.

15.已知圆锥的底面半径为 1，母线长为 3，则该圆锥内半径最大的球的体积为____.

16.关于函数$f(x)=\sin x+\frac{1}{\sin x}$有如下四个命题：

①$f(x)$的图像关于y轴对称.

②$f(x)$的图像关于原点对称.

③$f(x)$的图像关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称.

④$f(x)$的最小值为 2.

其中所有真命题的序号是____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

设数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4n$.

(1)计算a_2，a_3，猜想$\{a_n\}$的通项公式并加以证明；

(2)求数列$\{2^n a_n\}$的前 n 项和S_n.

18.（12 分）

某学生兴趣小组随机调查了某市 100 天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次，整理数据得到下表（单位：天）：

锻炼人次 / 空气质量等级	[0, 200]	(200, 400]	(400, 600]
1（优）	2	16	25
2（良）	5	10	12
3（轻度污染）	6	7	8
4（中度污染）	7	2	0

（1） 分别估计该市一天的空气质量等级为 1, 2, 3, 4 的概率；

（2） 求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值(同一组中的数据用该组区间的中点值为代表)；

（3） 若某天的空气质量等级为 1 或 2，则称这天“空气质量好”；若某天的空气质量等级为 3 或 4，则称这天“空气质量不好”。根据所给数据，完成下面的2×2列联表，并根据列联表，判断是否有 95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关？

	人次≤ 400	人次>400
空气质量好		
空气质量不好		

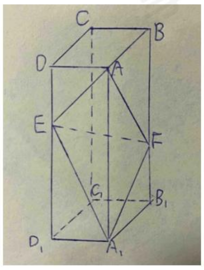
附:，$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\ge k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19.（12 分）

如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点 E，F 分别在棱DD_1，BB_1上，且$2DE=ED_1$，

$BF=2FB_1$.



（1）证明：点 C_1 在平面 AEF 内；

（2）若 $AB=2$，$AD=1$，$AA_1=3$，求二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值.

20.（12 分）

已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{m^2}=1\ (0<m<5)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，A，B 分别为 C 的左、右顶点.

（1）求 C 的方程；

（2）若点 P 在 C 上，点 Q 在直线 $x=6$ 上，且 $|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$，求△APQ 的面积.

21.（12 分）

设函数 $f(x)=x^3+bx+c$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\frac{1}{2},f(\frac{1}{2}))$ 处的切线与 y 轴重直，

(1)求 b；

(2)若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点，证明：$f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

（二）选考题：共 10 分，请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.［选修 4—4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2-t-t^2\\y=2-3t+t^2\end{cases}$（t 为参数且 t≠1），C 与坐标轴交于 A，B 两点.

（1）求｜AB｜；

（2）以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求直线 AB 的极坐标方程.

23.［选修 4—5：不等式选讲］（10 分）

设$a,b,c\in R$， $a+b+c=0$，abc=1.

（1） 证明：$ab+bc+ca<0$；

（2） 用$\max\{a,b,c\}$表示a,b,c的最大值，证明：$\max\{a,b,c\}\geq\sqrt[3]{4}$