21.（12分）

已知椭圆$C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{m^2}=1(0<m<5)$的离心率为$\frac{\sqrt{15}}{4}$，$A$，$B$分别为$C$的左、右顶点.

（1）求C的方程；

（2）若点P在C上，点Q在直线$x=6$上，且$|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$，求$\triangle APQ$的面积.

（二）选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修4—4：坐标系与参数方程]（10分）

在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=2-t-t^2,\\ y=2-3t+t^2\end{cases}$（$t$为参数且$t\neq1$），$C$与坐标轴交于$A$，$B$两点.

（1）求$|AB|$；

（2）以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，求直线AB的极坐标方程.

23. [选修4—5：不等式选讲]（10分）

设a，b，$c\in\mathbf{R}$，$a+b+c=0$，$abc=1$.

（1）证明：$ab+bc+ca<0$；

（2）用$\max\{a,b,c\}$表示a，b，c中的最大值，证明：$\max\{a,b,c\}\geqslant\sqrt[3]{4}$.

文科数学试题参考答案

一、选择题

1. B　2. D　3. C　4. C　5. B　6. A

7. B　8. B　9. C　10. A　11. C　12. D

二、填空题

13. 7　14. $\sqrt{3}$　15. 1　16. $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$

三、解答题

17. 解：

（1）设$\{a_n\}$的公比为q，则$a_n=a_1q^{n-1}$．由已知得

$$\begin{cases}a_1+a_1q=4,\\ a_1q^2-a_1=8.\end{cases}$$

解得$a_1=1$，$q=3$．

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3^{n-1}$．

（2）由（1）知$\log_3 a_n=n-1$．

故$S_n=\frac{n(n-1)}{2}$．

由$S_m+S_{m+1}=S_{m+3}$得$m(m-1)+(m+1)m=(m+3)(m+2)$，即$m^2-5m-6=0$．

解得$m=-1$（舍去），$m=6$．

18. 解：

（1）由所给数据，该市一天的空气质量等级为1，2，3，4的概率的估计值如下表：

空气质量等级	1	2	3	4
概率的估计值	0.43	0.27	0.21	0.09

（2）一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值为

$$\frac{1}{100}(100\times20+300\times35+500\times45)=350.$$

（3）根据所给数据，可得2×2列联表：

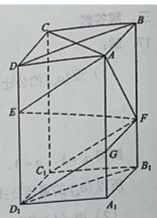
	人次$\leqslant400$	人次>400
空气质量好	33	37
空气质量不好	22	8

根据列联表得

$$K^2=\frac{100\times(33\times8-22\times37)^2}{55\times45\times70\times30}\approx5.820.$$

由于$5.820>3.841$，故有95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关．

19．解:



（1）如图，连结 BD，B_1D_1．因为 $AB=BC$，所以四边形 $ABCD$ 为正方形，故 $AC\perp BD$．又因为 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，于是 $AC\perp BB_1$．所以 $AC\perp$ 平面 BB_1D_1D．

由于 $EF\subset$ 平面 BB_1D_1D，所以 $EF\perp AC$．

（2）如图，在棱 AA_1 上取点 G，使得 $AG=2GA_1$，连结 GD_1，FC_1，FG．

因为 $D_1E=\frac{2}{3}DD_1$，$AG=\frac{2}{3}AA_1$，$DD_1\mathrel{\underline{\underline{/\!/}}}AA_1$，所以 $ED_1\mathrel{\underline{\underline{/\!/}}}AG$，于是四边形 ED_1GA 为平行四边形，故 $AE/\!/GD_1$．

因为 $B_1F=\frac{1}{3}BB_1$，$A_1G=\frac{1}{3}AA_1$，$BB_1\mathrel{\underline{\underline{/\!/}}}AA_1$，所以 $FG\mathrel{\underline{\underline{/\!/}}}A_1B_1$，$FG\mathrel{\underline{\underline{/\!/}}}C_1D_1$，四边形 FGD_1C_1 为平行四边形，故 $GD_1/\!/FC_1$．

于是 $AE/\!/FC_1$．所以 A，E，F，C_1 四点共面，即点 C_1 在平面 AEF 内．

20．解:

（1）$f'(x)=3x^2-k$．

当 $k=0$ 时，$f(x)=x^3$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增；

当 $k<0$ 时，$f'(x)=3x^2-k>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增．

当 $k>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}$．当 $x\in(-\infty,-\frac{\sqrt{3k}}{3})$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(-\frac{\sqrt{3k}}{3},\frac{\sqrt{3k}}{3})$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\frac{\sqrt{3k}}{3},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$．故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{\sqrt{3k}}{3})$，$(\frac{\sqrt{3k}}{3},+\infty)$ 单调递增，在 $(-\frac{\sqrt{3k}}{3},\frac{\sqrt{3k}}{3})$ 单调递减．

（2）由（1）知，当 $k\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，$f(x)$ 不可能有三个零点．

当 $k>0$ 时，$x=-\frac{\sqrt{3k}}{3}$ 为 $f(x)$ 的极大值点，$x=\frac{\sqrt{3k}}{3}$ 为 $f(x)$ 的极小值点．此时，

$-k-1<-\frac{\sqrt{3k}}{3}<\frac{\sqrt{3k}}{3}<k+1$ 且 $f(-k-1)<0$，$f(k+1)>0$，$f(-\frac{\sqrt{3k}}{3})>0$．根据 $f(x)$ 的单调性，当且仅当 $f(\frac{\sqrt{3k}}{3})<0$，即 $k^2-\frac{2k\sqrt{3k}}{9}<0$ 时，$f(x)$ 有三个零点，解得 $k<\frac{4}{27}$．因此 k 的取值范围为 $(0,\frac{4}{27})$．

21．解:

（1）由题设可得 $\frac{\sqrt{25-m^2}}{5}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，得 $m^2=\frac{25}{16}$，所以 C 的方程为

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{25}{16}}=1.$$

（2）设 $P(x_P,y_P)$，$Q(6,y_Q)$，根据对称性可设 $y_Q>0$，由题意知 $y_P>0$．

由已知可得 $B(5,0)$，直线 BP 的方程为 $y=-\frac{1}{y_Q}(x-5)$，所以 $|BP|=y_P\sqrt{1+y_Q^2}$，$|BQ|=\sqrt{1+y_Q^2}$．

因为 $|BP|=|BQ|$，所以 $y_P=1$，将 $y_P=1$ 代入 C 的方程，解得 $x_P=3$ 或 -3．

由直线 BP 的方程得 $y_Q=2$ 或 8．

所以点 P，Q 的坐标分别为 $P_1(3,1)$，$Q_1(6,2)$；$P_2(-3,1)$，$Q_2(6,8)$．

$|P_1Q_1|=\sqrt{10}$，直线 P_1Q_1 的方程为 $y=\frac{1}{3}x$，点 $A(-5,0)$ 到直线 P_1Q_1 的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$，故 $\triangle AP_1Q_1$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times\sqrt{10}=\frac{5}{2}$．

$|P_2Q_2|=\sqrt{130}$，直线 P_2Q_2 的方程为 $y=\frac{7}{9}x+\frac{10}{3}$，点 A 到直线 P_2Q_2 的距离为 $\frac{\sqrt{130}}{26}$，故 $\triangle AP_2Q_2$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{130}}{26}\times\sqrt{130}=\frac{5}{2}$．

综上，$\triangle APQ$ 的面积为 $\frac{5}{2}$．

22．解：

（1）因为$t\neq 1$，由$2-t-t^2=0$得$t=-2$，所以C与y轴的交点为$(0,12)$；由$2-3t+t^2=0$得$t=2$，所以C与x轴的交点为$(-4,0)$．

故$|AB|=4\sqrt{10}$．

（2）由（1）可知，直线AB的直角坐标方程为$\frac{x}{-4}+\frac{y}{12}=1$，将$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$代入，得直线$AB$的极坐标方程

$$3\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+12=0．$$

23．解：

（1）由题设可知，a，b，c均不为零，所以

$$\begin{aligned}ab+bc+ca&=\frac{1}{2}[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]\\&=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\\&<0.\end{aligned}$$

（2）不妨设$\max\{a,b,c\}=a$，因为$abc=1$，$a=-(b+c)$，所以$a>0$，$b<0$，$c<0$．由$bc\leqslant\frac{(b+c)^2}{4}$，可得$abc\leqslant\frac{a^3}{4}$，故$a\geqslant\sqrt[3]{4}$，所以$\max\{a,b,c\}\geqslant\sqrt[3]{4}$．