

2020年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学试题参考答案

一、选择题

1. D      2. C      3. C      4. A      5. D      6. B  
7. C      8. B      9. C      10. D      11. B      12. A

二、填空题

13. 1      14. 5      15.  $y=2x$       16. 7

三、解答题

17. 解:

(1) 由试加工产品等级的频数分布表知,

甲分厂加工出来的一件产品为A级品的概率的估计值为  $\frac{40}{100} = 0.4$ ;

乙分厂加工出来的一件产品为A级品的概率的估计值为  $\frac{28}{100} = 0.28$ .

(2) 由数据知甲分厂加工出来的100件产品利润的频数分布表为

利润	65	25	-5	-75
频数	40	20	20	20

因此甲分厂加工出来的100件产品的平均利润为

$$\frac{65 \times 40 + 25 \times 20 - 5 \times 20 - 75 \times 20}{100} = 15.$$

由数据知乙分厂加工出来的100件产品利润的频数分布表为

利润	70	30	0	-70
频数	28	17	34	21

因此乙分厂加工出来的100件产品的平均利润为

$$\frac{70 \times 28 + 30 \times 17 + 0 \times 34 - 70 \times 21}{100} = 10.$$

比较甲、乙两分厂加工的产品的平均利润, 应选甲分厂承接加工业务.

18. 解:

(1) 由题设及余弦定理得  $28 = 3c^2 + c^2 - 2 \times \sqrt{3}c^2 \times \cos 150^\circ$ .

解得  $c = -2$  (舍去),  $c = 2$ , 从而  $a = 2\sqrt{3}$ .

$\triangle ABC$  的面积为  $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 \times \sin 150^\circ = \sqrt{3}$ .

(2) 在  $\triangle ABC$  中,  $A = 180^\circ - B - C = 30^\circ - C$ , 所以

$$\sin A + \sqrt{3} \sin C = \sin(30^\circ - C) + \sqrt{3} \sin C = \sin(30^\circ + C).$$

故  $\sin(30^\circ + C) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

而  $0^\circ < C < 30^\circ$ , 所以  $30^\circ + C = 45^\circ$ , 故  $C = 15^\circ$ .

19. 解:

(1) 由题设可知,  $PA = PB = PC$ .

由于  $\triangle ABC$  是正三角形, 故可得  $\triangle PAC \cong \triangle PAB$ ,

$\triangle PAC \cong \triangle PBC$ .

又  $\angle APC = 90^\circ$ , 故  $\angle APB = 90^\circ$ ,  $\angle BPC = 90^\circ$ .

从而  $PB \perp PA$ ,  $PB \perp PC$ , 故  $PB \perp$  平面  $PAC$ , 所以平面  $PAB \perp$  平面  $PAC$ .

(2) 设圆锥的底面半径为  $r$ , 母线长为  $l$ .

由题设可得  $rl = \sqrt{3}$ ,  $l^2 - r^2 = 2$ .

解得  $r = 1$ ,  $l = \sqrt{3}$ .

从而  $AB = \sqrt{3}$ . 由 (1) 可得  $PA^2 + PB^2 = AB^2$ , 故  $PA = PB = PC = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

所以三棱锥  $P-ABC$  的体积为

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times PA \times PB \times PC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{6}}{8}.$$



20. 解:

(1) 当  $a = 1$  时,  $f(x) = e^x - x - 2$ , 则  $f'(x) = e^x - 1$ .

当  $x < 0$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x > 0$  时,  $f'(x) > 0$ .

所以  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  单调递减, 在  $(0, +\infty)$  单调递增.

$$(2) f'(x) = e^x - a.$$

当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  单调递增, 故  $f(x)$  至多存在 1 个零点, 不合题意.

当  $a > 0$  时, 由  $f'(x) = 0$  可得  $x = \ln a$ . 当  $x \in (-\infty, \ln a)$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x \in (\ln a, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ . 所以  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln a)$  单调递减, 在  $(\ln a, +\infty)$  单调递增, 故当  $x = \ln a$  时,  $f(x)$  取得最小值, 最小值为  $f(\ln a) = -a(1 + \ln a)$ .

(i) 若  $0 < a \leq \frac{1}{e}$ , 则  $f(\ln a) \geq 0$ ,  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  至多存在 1 个零点, 不合题意.

(ii) 若  $a > \frac{1}{e}$ , 则  $f(\ln a) < 0$ .

由于  $f(-2) = e^{-2} > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln a)$  存在唯一零点.

由 (1) 知, 当  $x > 2$  时,  $e^x - x - 2 > 0$ , 所以当  $x > 4$  且  $x > 2 \ln(2a)$  时,

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}} - a(x+2) \\ &> e^{\ln(2a)} \cdot \left(\frac{x}{2} + 2\right) - a(x+2) \\ &= 2a \\ &> 0. \end{aligned}$$

故  $f(x)$  在  $(\ln a, +\infty)$  存在唯一零点. 从而  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  有两个零点.

综上,  $a$  的取值范围是  $(\frac{1}{e}, +\infty)$ .

21. 解:

(1) 由题设得  $A(-a, 0)$ ,  $B(a, 0)$ ,  $G(0, 1)$ .

则  $\overline{AG} = (a, 1)$ ,  $\overline{GB} = (a, -1)$ . 由  $\overline{AG} \cdot \overline{GB} = 8$  得  $a^2 - 1 = 8$ , 即  $a = 3$ .

所以  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ .



(2) 设  $C(x_1, y_1)$ ,  $D(x_2, y_2)$ ,  $P(6, t)$ .

若  $t \neq 0$ , 设直线  $CD$  的方程为  $x = my + n$ , 由题意可知  $-3 < n < 3$ .

由于直线  $PA$  的方程为  $y = \frac{t}{9}(x+3)$ , 所以  $y_1 = \frac{t}{9}(x_1+3)$ .

直线  $PB$  的方程为  $y = \frac{t}{3}(x-3)$ , 所以  $y_2 = \frac{t}{3}(x_2-3)$ .

可得  $3y_1(x_2-3) = y_2(x_1+3)$ .

由于  $\frac{x_1^2}{9} + y_1^2 = 1$ , 故  $y_1^2 = -\frac{(x_1+3)(x_1-3)}{9}$ , 可得  $27y_1y_2 = -(x_1+3)(x_2+3)$ , 即

$$(27+m^2)y_1y_2 + m(n+3)(y_1+y_2) + (n+3)^2 = 0. \quad \textcircled{1}$$

将  $x = my + n$  代入  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$  得

$$(m^2+9)y^2 + 2mny + n^2 - 9 = 0.$$

所以  $y_1 + y_2 = -\frac{2mn}{m^2+9}$ ,  $y_1y_2 = \frac{n^2-9}{m^2+9}$ .

代入①式得  $(27+m^2)(\frac{n^2-9}{m^2+9}) - 2m(n+3)mn + (n+3)^2(m^2+9) = 0$ .

解得  $n = -3$  (舍去),  $n = \frac{3}{2}$ .

故直线  $CD$  的方程为  $x = my + \frac{3}{2}$ , 即直线  $CD$  过定点  $(\frac{3}{2}, 0)$ .

若  $t = 0$ , 则直线  $CD$  的方程为  $y = 0$ , 过点  $(\frac{3}{2}, 0)$ .

综上, 直线  $CD$  过定点  $(\frac{3}{2}, 0)$ .

22. 解:

(1) 当  $k=1$  时,  $C_1: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$  消去参数  $t$  得  $x^2 + y^2 = 1$ , 故曲线  $C_1$  是圆心为坐标

原点, 半径为 1 的圆.

(2) 当  $k=4$  时,  $C_1: \begin{cases} x = \cos^4 t, \\ y = \sin^4 t, \end{cases}$  消去参数  $t$  得  $C_1$  的直角坐标方程为  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ .

$C_2$  的直角坐标方程为  $4x - 16y + 3 = 0$ .

$$\text{由} \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \\ 4x - 16y + 3 = 0 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = \frac{1}{4}, \\ y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

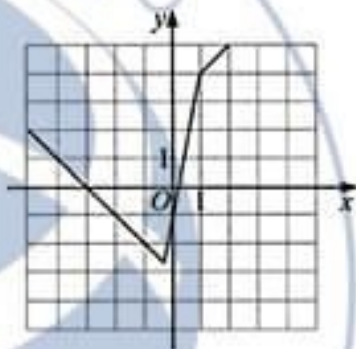
故  $C_1$  与  $C_2$  的公共点的直角坐标为  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ .

23. 解:

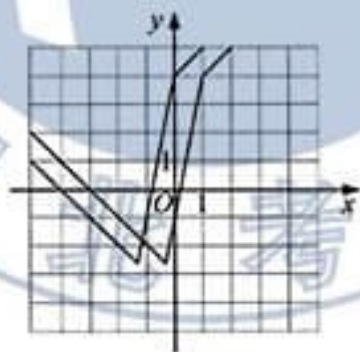
(1) 由题设知

$$f(x) = \begin{cases} -x-3, & x \leq -\frac{1}{3}, \\ 5x-1, & -\frac{1}{3} < x \leq 1, \\ x+3, & x > 1. \end{cases}$$

$y = f(x)$  的图像如图所示.



(2) 函数  $y = f(x)$  的图像向左平移 1 个单位长度后得到函数  $y = f(x+1)$  的图像.



$y = f(x)$  的图像与  $y = f(x+1)$  的图像的交点坐标为  $(-\frac{7}{6}, -\frac{11}{6})$ .

由图像可知当且仅当  $x < -\frac{7}{6}$  时,  $y = f(x)$  的图像在  $y = f(x+1)$  的图像上方.

故不等式  $f(x) > f(x+1)$  的解集为  $(-\infty, -\frac{7}{6})$ .