

2018年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）

数 学 · 参 考 答 案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题4分，满分40分。

1.C 2.B 3.C 4.B 5.D 6.A 7.D 8.D 9.A 10.B

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。多空题每题6分，单选题每题4分，满分36分。

11.8; 11 12.-2; 8 13. $\frac{\sqrt{21}}{7}$; 3 14.7

15.(1,4); (1,3]∪(4,+∞) 16.1260 17.5

三、解答题：本大题共5小题，共74分。

18.本题主要考查三角函数及其恒等变换等基础知识，同时考查运算求解能力。满分14分。

(I) 由角 α 的终边过点 $P(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ 得 $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$,

所以 $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

(II) 由角 α 的终边过点 $P(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ 得 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$,

由 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$ 得 $\cos(\alpha + \beta) = \pm \frac{12}{13}$.

由 $\beta = (\alpha + \beta) - \alpha$ 得 $\cos \beta = \cos(\alpha + \beta)\cos \alpha + \sin(\alpha + \beta)\sin \alpha$,

所以 $\cos \beta = -\frac{56}{65}$ 或 $\cos \beta = -\frac{16}{65}$.

19.本题主要考查空间点、线、面位置关系，直线与平面所成的角等基础知识，同时考查空间想象能力和运算求解能力。满分15分。

方法一：

(I) 由 $AB = 2, AA_1 = 4, BB_1 = 2, AA_1 \perp AB, BB_1 \perp AB$ 得 $AB_1 = A_1B_1 = 2\sqrt{2}$ ，所以

$$A_1B_1^2 + AB_1^2 = AA_1^2.$$

故 $AB_1 \perp A_1B_1$.

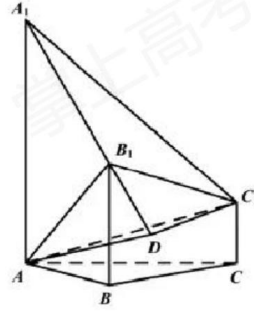
由 $BC = 2, BB_1 = 2, CC_1 = 1, BB_1 \perp BC, CC_1 \perp BC$ 得 $B_1C_1 = \sqrt{5}$,

由 $AB = BC = 2, \angle ABC = 120^\circ$ 得 $AC = 2\sqrt{3}$,

由 $CC_1 \perp AC$, 得 $AC_1 = \sqrt{13}$, 所以 $AB_1^2 + B_1C_1^2 = AC_1^2$, 故 $AB_1 \perp B_1C_1$.

因此 $AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

(II) 如图, 过点 C_1 作 $C_1D \perp A_1B_1$, 交直线 A_1B_1 于点 D , 连结 AD .



由 $AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ 得平面 $A_1B_1C_1 \perp$ 平面 ABB_1 ,

由 $C_1D \perp A_1B_1$ 得 $C_1D \perp$ 平面 ABB_1 ,

所以 $\angle C_1AD$ 是 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角.

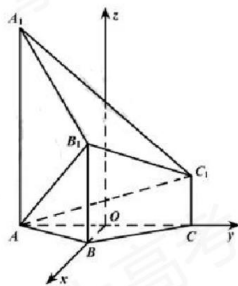
由 $B_1C_1 = \sqrt{5}, A_1B_1 = 2\sqrt{2}, A_1C_1 = \sqrt{21}$ 得 $\cos \angle C_1A_1B_1 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}, \sin \angle C_1A_1B_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}$,

所以 $C_1D = \sqrt{3}$, 故 $\sin \angle C_1AD = \frac{C_1D}{AC_1} = \frac{\sqrt{39}}{13}$.

因此, 直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角的正弦值是 $\frac{\sqrt{39}}{13}$.

方法二:

(I) 如图, 以 AC 的中点 O 为原点, 分别以射线 OB, OC 为 x, y 轴的正半轴, 建立空间直角坐标系 $O-xyz$.



由题意知各点坐标如下:

$$A(0, -\sqrt{3}, 0), B(1, 0, 0), A_1(0, -\sqrt{3}, 4), B_1(1, 0, 2), C_1(0, \sqrt{3}, 1),$$

因此 $\overrightarrow{AB_1} = (1, \sqrt{3}, 2), \overrightarrow{A_1B_1} = (1, \sqrt{3}, -2), \overrightarrow{A_1C_1} = (0, 2\sqrt{3}, -3)$, 由 $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0$ 得

$$AB_1 \perp A_1B_1.$$

由 $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0$ 得 $AB_1 \perp A_1C_1$.

所以 $AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

(II) 设直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角为 θ .

由 (I) 可知 $\overrightarrow{AC_1} = (0, 2\sqrt{3}, 1), \overrightarrow{AB} = (1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{BB_1} = (0, 0, 2)$,

设平面 ABB_1 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$.

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x + \sqrt{3}y = 0, \\ 2z = 0, \end{cases} \text{ 可取 } \mathbf{n} = (-\sqrt{3}, 1, 0).$$

$$\text{所以 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AC_1}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AC_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{AC_1}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{39}}{13}.$$

因此, 直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角的正弦值是 $\frac{\sqrt{39}}{13}$.

20. 本题主要考查等差数列、等比数列、数列求和等基础知识, 同时考查运算求解能力和综合应用能力. 满分 15 分.

(I) 由 $a_4 + 2$ 是 a_3, a_5 的等差中项得 $a_3 + a_5 = 2a_4 + 4$,

$$\text{所以 } a_3 + a_4 + a_5 = 3a_4 + 4 = 28,$$

解得 $a_4 = 8$.

由 $a_3 + a_5 = 20$ 得 $8(q + \frac{1}{q}) = 20$,

因为 $q > 1$, 所以 $q = 2$.

(II) 设 $c_n = (b_{n+1} - b_n)a_n$, 数列 $\{c_n\}$ 前 n 项和为 S_n .

由 $c_n = \begin{cases} S_1, n=1, \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2. \end{cases}$ 解得 $c_n = 4n - 1$.

由 (I) 可知 $a_n = 2^{n-1}$,

所以 $b_{n+1} - b_n = (4n - 1) \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$,

故 $b_n - b_{n-1} = (4n - 5) \cdot (\frac{1}{2})^{n-2}, n \geq 2$,

$b_n - b_1 = (b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \dots + (b_3 - b_2) + (b_2 - b_1)$

$= (4n - 5) \cdot (\frac{1}{2})^{n-2} + (4n - 9) \cdot (\frac{1}{2})^{n-3} + \dots + 7 \cdot \frac{1}{2} + 3$.

设 $T_n = 3 + 7 \cdot \frac{1}{2} + 11 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \dots + (4n - 5) \cdot (\frac{1}{2})^{n-2}, n \geq 2$,

$\frac{1}{2}T_n = 3 \cdot \frac{1}{2} + 7 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \dots + (4n - 9) \cdot (\frac{1}{2})^{n-2} + (4n - 5) \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$

所以 $\frac{1}{2}T_n = 3 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \dots + 4 \cdot (\frac{1}{2})^{n-2} - (4n - 5) \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$,

因此 $T_n = 14 - (4n + 3) \cdot (\frac{1}{2})^{n-2}, n \geq 2$,

又 $b_1 = 1$, 所以 $b_n = 15 - (4n + 3) \cdot (\frac{1}{2})^{n-2}$.

21. 本题主要考查椭圆、抛物线的几何性质, 直线与抛物线的位置关系等基础知识, 同时考查运算求解能力和综合应用能力. 满分 15 分。

(I) 设 $P(x_0, y_0)$, $A(\frac{1}{4}y_1^2, y_1)$, $B(\frac{1}{4}y_2^2, y_2)$.

因为 PA , PB 的中点在抛物线上,

所以 y_1, y_2 为方程 $(\frac{y+y_0}{2})^2 = 4 \cdot \frac{\frac{1}{4}y^2 + x_0}{2}$ 即 $y^2 - 2y_0y + 8x_0 - y_0^2 = 0$ 的两个不同的

实数根.

所以 $y_1 + y_2 = 2y_0$.

因此, PM 垂直于 y 轴.

$$(II) \text{ 由 (I) 可知 } \begin{cases} y_1 + y_2 = 2y_0, \\ y_1 y_2 = 8x_0 - y_0^2, \end{cases}$$

$$\text{所以 } |PM| = \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2) - x_0 = \frac{3}{4}y_0^2 - 3x_0, \quad |y_1 - y_2| = 2\sqrt{2(y_0^2 - 4x_0)}.$$

$$\text{因此, } \triangle PAB \text{ 的面积 } S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}|PM| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{3\sqrt{2}}{4}(y_0^2 - 4x_0)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{因为 } x_0^2 + \frac{y_0^2}{4} = 1(x_0 < 0), \text{ 所以 } y_0^2 - 4x_0 = -4x_0^2 - 4x_0 + 4 \in [4, 5].$$

$$\text{因此, } \triangle PAB \text{ 面积的取值范围是 } [6\sqrt{2}, \frac{15\sqrt{10}}{4}].$$

22. 本题主要考查函数的单调性, 导数的运算及其应用, 同时考查逻辑思维能力和综合应用能力. 满分 15 分.

$$(I) \text{ 函数 } f(x) \text{ 的导函数 } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x},$$

$$\text{由 } f'(x_1) = f'(x_2) \text{ 得 } \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_2}} - \frac{1}{x_2},$$

$$\text{因为 } x_1 \neq x_2, \text{ 所以 } \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{由基本不等式得 } \frac{1}{2}\sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq 2\sqrt{x_1 x_2}.$$



$$\text{因为 } x_1 \neq x_2, \text{ 所以 } x_1 x_2 > 256.$$

$$\text{由题意得 } f(x_1) + f(x_2) = \sqrt{x_1} - \ln x_1 + \sqrt{x_2} - \ln x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{x_1 x_2} - \ln(x_1 x_2).$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} - \ln x,$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{1}{4x}(\sqrt{x} - 4),$$

所以

x	$(0, 16)$	16	$(16, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		$2-4\ln 2$	

所以 $g(x)$ 在 $[256, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{故 } g(x_1, x_2) > g(256) = 8 - 8 \ln 2,$$

$$\text{即 } f(x_1) + f(x_2) > 8 - 8 \ln 2.$$

$$(II) \text{ 令 } m = e^{-(|a|+k)}, n = \left(\frac{|a|+1}{k}\right)^2 + 1, \text{ 则}$$

$$f(m) - km - a > |a| + k - k - a \geq 0,$$

$$f(n) - kn - a < n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{a}{n} - k\right) \leq n\left(\frac{|a|+1}{\sqrt{n}} - k\right) < 0,$$

所以, 存在 $x_0 \in (m, n)$ 使 $f(x_0) = kx_0 + a$.

所以, 对于任意的 $a \in \mathbf{R}$ 及 $k \in (0, +\infty)$, 直线 $y = kx + a$ 与曲线 $y = f(x)$ 有公共点.

$$\text{由 } f(x) = kx + a \text{ 得 } k = \frac{\sqrt{x} - \ln x - a}{x}.$$

$$\text{设 } h(x) = \frac{\sqrt{x} - \ln x - a}{x},$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{\ln x - \frac{\sqrt{x}}{2} - 1 + a}{x^2} = \frac{-g(x) - 1 + a}{x^2},$$

$$\text{其中 } g(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} - \ln x.$$

由 (I) 可知 $g(x) \geq g(16)$, 又 $a \leq 3 - 4 \ln 2$,

$$\text{故 } -g(x) - 1 + a \leq -g(16) - 1 + a = -3 + 4 \ln 2 + a \leq 0,$$

所以 $h'(x) \leq 0$, 即函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 因此方程 $f(x) - kx - a = 0$ 至

多 1 个实根.

综上, 当 $a \leq 3 - 4 \ln 2$ 时, 对于任意 $k > 0$, 直线 $y = kx + a$ 与曲线 $y = f(x)$ 有唯一公共点