2018年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（文史类）参考答案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分40分．

（1）C　　（2）C　　（3）A　　（4）B

（5）D　　（6）A　　（7）A　　（8）C

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分30分．

（9）$4-\mathrm{i}$　　（10）e　　（11）$\frac{1}{3}$

（12）$x^2+y^2-2x=0$　　（13）$\frac{1}{4}$　　（14）$[\frac{1}{8}，2]$

三、解答题

（15）本小题主要考查随机抽样、用列举法计算随机事件所含的基本事件数、古典概型及其概率计算公式等基本知识．考查运用概率知识解决简单实际问题的能力．满分13分．

（Ⅰ）解：由已知，甲、乙、丙三个年级的学生志愿者人数之比为3∶2∶2，由于采用分层抽样的方法从中抽取7名同学，因此应从甲、乙、丙三个年级的学生志愿者中分别抽取3人，2人，2人．

（Ⅱ）（i）解：从抽出的7名同学中随机抽取2名同学的所有可能结果为$\{A，B\}$，$\{A，C\}$，$\{A，D\}$，$\{A，E\}$，$\{A，F\}$，$\{A，G\}$，$\{B，C\}$，$\{B，D\}$，$\{B，E\}$，$\{B，F\}$，$\{B，G\}$，$\{C，D\}$，$\{C，E\}$，$\{C，F\}$，$\{C，G\}$，$\{D，E\}$，$\{D，F\}$，$\{D，G\}$，$\{E，F\}$，$\{E，G\}$，$\{F，G\}$，共21种．

（ii）解：由（Ⅰ），不妨设抽出的7名同学中，来自甲年级的是A，B，C，来自乙年级的是D，E，来自丙年级的是F，G，则从抽出的7名同学中随机抽取的2名同学来自同一年级的所有可能结果为$\{A，B\}$，$\{A，C\}$，$\{B，C\}$，$\{D，E\}$，$\{F，G\}$，共5种．

所以，事件M发生的概率为$P（M）=\frac{5}{21}$．

（16）本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角差的正弦与余弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识，考查运算求解能力．满分13分．

（Ⅰ）解：在△ABC中，由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得$b\sin A=a\sin B$，又由$b\sin A=a\cos(B-\frac{\pi}{6})$，得$a\sin B=a\cos(B-\frac{\pi}{6})$，即$\sin B=\cos(B-\frac{\pi}{6})$，可得$\tan B=\sqrt{3}$．又

因为 $B\in(0,\pi)$，可得 $B=\frac{\pi}{3}$．

（Ⅱ）解：在△ABC 中，由余弦定理及 $a=2$，$c=3$，$B=\frac{\pi}{3}$，有 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=7$，

故 $b=\sqrt{7}$．

由 $b\sin A=a\cos(B-\frac{\pi}{6})$，可得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$．因为 $a<c$，故 $\cos A=\frac{2}{\sqrt{7}}$．因此

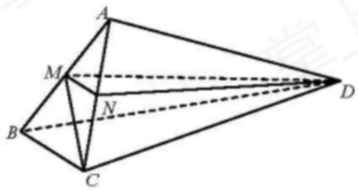
$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，$\cos 2A=2\cos^2 A-1=\frac{1}{7}$.

所以，$\sin(2A-B)=\sin 2A\cos B-\cos 2A\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

（17）本小题主要考查异面直线所成的角、直线与平面所成的角、平面与平面垂直等基础知识．考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力．满分 13 分．

（Ⅰ）由平面 $ABC\perp$ 平面 ABD，平面 $ABC\cap$ 平面 $ABD=AB$，$AD\perp AB$，可得 $AD\perp$ 平面 ABC，故 $AD\perp BC$．

（Ⅱ）解：取棱 AC 的中点 N，连接 MN，ND．又因为 M 为棱 AB 的中点，故 $MN// BC$．所以$\angle DMN$（或其补角）为异面直线 BC 与 MD 所成的角．



在 Rt△DAM 中，$AM=1$，故 $DM=\sqrt{AD^2+AM^2}=\sqrt{13}$．因为 $AD\perp$ 平面 ABC，故 $AD\perp AC$．

在 Rt△DAN 中，$AN=1$，故 $DN=\sqrt{AD^2+AN^2}=\sqrt{13}$．

在等腰三角形 DMN 中，$MN=1$，可得 $\cos\angle DMN=\frac{\frac{1}{2}MN}{DM}=\frac{\sqrt{13}}{26}$．

所以，异面直线 BC 与 MD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{26}$．

（Ⅲ）解：连接 CM. 因为△ABC 为等边三角形，M 为边 AB 的中点，故 $CM\perp AB$，$CM=\sqrt{3}$．又因为平面 $ABC\perp$ 平面 ABD，而 $CM\subset$ 平面 ABC，故 $CM\perp$ 平面 ABD．所以，$\angle CDM$ 为直线 CD 与平面 ABD 所成的角．

在 Rt△CAD 中，$CD=\sqrt{AC^2+AD^2}=4$．

在 Rt△CMD 中，$\sin\angle CDM=\dfrac{CM}{CD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

所以，直线 CD 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

（18）本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及前 n 项和公式等基础知识.考查数列求和的基本方法和运算求解能力.满分 13 分.

（I）解：设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，由 $b_1=1$，$b_3=b_2+2$，可得 $q^2-q-2=0$.

因为 $q>0$，可得 $q=2$，故 $b_n=2^{n-1}$.所以 $T_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.由 $b_4=a_3+a_5$，可得 $a_1+3d=4$.由 $b_5=a_4+2a_6$，可得

$3a_1+13d=16$, 从而 $a_1=1,d=1$，故 $a_n=n$，所以 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

（II）解：由（I），知 $T_1+T_2+\cdots+T_n=(2^1+2^3+\cdots+2^n)-n=2^{n+1}-n-2$.

由 $S_n+(T_1+T_2+\cdots+T_n)=a_n+4b_n$ 可得 $\dfrac{n(n+1)}{2}+2^{n+1}-n-2=n+2^{n+1}$，

整理得 $n^2-3n-4=0$, 解得 $n=-1$（舍），或 $n=4$.所以 n 的值为 4.

（19）本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识.考查用代数方法研究圆锥曲线的性质.考查运算求解能力，以及用方程思想解决问题的能力.满分 14 分.

（I）解：设椭圆的焦距为 $2c$，由已知得 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{5}{9}$，又由 $a^2=b^2+c^2$，可得 $2a=3b$. 由

$|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}$,从而 $a=3,b=2$.

所以，椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

（II）解：设点 P 的坐标为 (x_1,y_1)，点 M 的坐标为 (x_2,y_2) ，由题意，$x_2>x_1>0$，

点 Q 的坐标为 $(-x_1,-y_1)$. 由△BPM 的面积是△BPQ 面积的 2 倍，可得$|PM|=2|PQ|$，

从而 $x_2-x_1=2[x_1-(-x_1)]$，即 $x_2=5x_1$.

易知直线 AB 的方程为 $2x+3y=6$，由方程组 $\begin{cases}2x+3y=6,\\ y=kx,\end{cases}$ 消去 y，可得 $x_2=\dfrac{6}{3k+2}$.由

方程组$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1,\\ y=kx,\end{cases}$消去$y$，可得$x_1=\dfrac{6}{\sqrt{9k^2+4}}$.由$x_2=5x_1$，可得$\sqrt{9k^2+4}=5(3k+2)$，

两边平方，整理得$18k^2+25k+8=0$，解得$k=-\dfrac{8}{9}$，或$k=-\dfrac{1}{2}$.

当$k=-\dfrac{8}{9}$时，$x_2=-9<0$，不合题意，舍去；当$k=-\dfrac{1}{2}$时，$x_2=12$，$x_1=\dfrac{12}{5}$，符合题意.

所以，k的值为$-\dfrac{1}{2}$.

（20）本小题主要考查导数的运算、导数的几何意义、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法，考查函数思想和分类讨论思想，考查综合分析问题和解决问题的能量，满分14分.

（Ⅰ）解：由已知，可得$f(x)=x(x-1)(x+1)=x^3-x$，故$f'(x)=3x-1$，因此$f(0)=0$，$f'(0)=-1$，又因为曲线$y=f(x)$在点$(0,\ f(0))$处的切线方程为$y-f(0)=f'(0)\ (x-0)$，故所求切线方程为$x+y=0$.

（Ⅱ）解：由已知可得

$f(x)=(x-t_2+3)(x-t_2)(x-t_2-3)=(x-t_2)^3-9(x-t_2)=x^3-3t_2x^2+(3t_2^2-9)x-t_2^2+9t_2$.

故$f'(x)=3x^3-6t_2x+3t_2^2-9$.令$f'(x)=0$，解得$x=t_2-\sqrt{3}$，或$x=t_2+\sqrt{3}$.

当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化如下表：

x	$(-\infty,\ t_2-\sqrt{3})$	$t_2-\sqrt{3}$	$(t_2-\sqrt{3},\ t_2+\sqrt{3})$	$t_2+\sqrt{3}$	$(t_2+\sqrt{3},\ +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数$f(x)$的极大值为$f(t_2-\sqrt{3})=(-\sqrt{3})^3-9\times(-\sqrt{3})=6\sqrt{3}$；函数小值为

$f(t_2+\sqrt{3})=(\sqrt{3})^3-9\times(\sqrt{3})=-6\sqrt{3}$.

（III）解：曲线$y=f(x)$与直线$y=-(x-t_2)-6\sqrt{3}$有三个互异的公共点等价于关于x的方程$(x-t_2+d)(x-t_2)(x-t_2-d)+(x-t_2)+6\sqrt{3}=0$有三个互异的实数解，令$u=x-t_2$，可得$u^3+(1-d^2)u+6\sqrt{3}=0$.

设函数 $g(x)=x^3+(1-d^2)x+6\sqrt{3}$，则曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=-(x-t_2)-6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点等价于函数 $y=g(x)$ 有三个零点.

$g'(x)=3x^3+(1-d^2)$.

当 $d^2\le 1$ 时，$g'(x)\ge 0$，这时 $g'(x)$ 在 **R** 上单调递增，不合题意.

当 $d^2>1$ 时，$g'(x)=0$，解得 $x_1=-\dfrac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}$，$x_2=\dfrac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}$.

易得，$g(x)$ 在 $(-\infty,\ x_1)$ 上单调递增，在 $[x_1,\ \ x_2]$ 上单调递减，在 $(x_2,\ \ +\infty)$ 上单调递增，

$g(x)$ 的极大值 $g(x_1)=g(-\dfrac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}})=\dfrac{2\sqrt{3}(d^2-1)^{\frac{3}{2}}}{9}+6\sqrt{3}>0$.

$g(x)$ 的极小值 $g(x_2)=g(\dfrac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}})=-\dfrac{2\sqrt{3}(d^2-1)^{\frac{3}{2}}}{9}+6\sqrt{3}$.

若 $g(x_2)\ge 0$，由 $g(x)$ 的单调性可知函数 $y=f(x)$ 至多有两个零点，不合题意.

若 $g(x_2)<0$, 即 $(d^2-1)^{\frac{3}{2}}>27$，也就是 $|d|>\sqrt{10}$，此时 $|d|>x_2$，$g(|d|)=|d|+6\sqrt{3}>0$,

且 $-2|d|<x_1, g(-2|d|)=-6|d|^3-2|d|+6\sqrt{3}<-62\sqrt{10}+6\sqrt{3}<0$，从而由 $g(x)$ 的单调性，可知函数 $y=g(x)$ 在区间 $(-2|d|,x_1),(x_1,x_2),(x_2,|d|)$ 内各有一个零点，符合题意.

所以 d 的取值范围是 $(-\infty,-\sqrt{10})\cup(\sqrt{10},+\infty)$.