绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（文史类）参考解答

一．选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分40分．

（1）D　　（2）C　　（3）B　　（4）B

（5）A　　（6）D　　（7）C　　（8）D

二．填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分30分．

（9）$\sqrt{13}$　　（10）$\left(-1,\dfrac{2}{3}\right)$　　（11）$x+2y-2=0$

（12）$\dfrac{\pi}{4}$　　（13）$\dfrac{9}{2}$　　（14）-1

三．解答题

（15）本小题主要考查随机抽样、用列举法计算随机事件所含的基本事件数、古典概型及其概率计算公式等基本知识．考查运用概率知识解决简单实际问题的能力．满分13分．

解：（Ⅰ）由已知，老、中、青员工人数之比为$6:9:10$，由于采用分层抽样的方法从中抽取25位员工，因此应从老、中、青员工中分别抽取6人，9人，10人．

（Ⅱ）（ⅰ）从已知的6人中随机抽取2人的所有可能结果为

$\{A,B\}$，$\{A,C\}$，$\{A,D\}$，$\{A,E\}$，$\{A,F\}$，$\{B,C\}$，$\{B,D\}$，$\{B,E\}$，$\{B,F\}$，$\{C,D\}$，$\{C,E\}$，$\{C,F\}$，$\{D,E\}$，$\{D,F\}$，$\{E,F\}$，共15种．

（ⅱ）由表格知，符合题意的所有可能结果为$\{A,B\}$，$\{A,D\}$，$\{A,E\}$，$\{A,F\}$，$\{B,D\}$，$\{B,E\}$，$\{B,F\}$，$\{C,E\}$，$\{C,F\}$，$\{D,F\}$，$\{E,F\}$，共11种．

所以，事件M发生的概率$P(M)=\dfrac{11}{15}$．

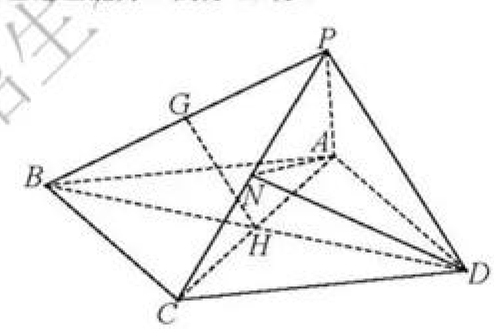
（16）本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角和的正弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识．考查运算求解能力．满分13分．

（Ⅰ）**解**：在$\triangle ABC$中，由正弦定理$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，得$b\sin C=c\sin B$，又由$3c\sin B=4a\sin C$，得$3b\sin C=4a\sin C$，即$3b=4a$．又因为$b+c=2a$，得到$b=\dfrac{4}{3}a$，$c=\dfrac{2}{3}a$．由余弦定理可得$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{16}{9}a^2}{2\cdot a\cdot\frac{2}{3}a}=-\dfrac{1}{4}$．

（Ⅱ）**解**：由（Ⅰ）可得$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，从而$\sin 2B=2\sin B\cos B=-\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，$\cos 2B=\cos^2 B-\sin^2 B=-\dfrac{7}{8}$，故

$$\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2B\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2B\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{15}}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{8}\times\frac{1}{2}=-\frac{3\sqrt{5}+7}{16}.$$

（17）本小题主要考查直线与平面平行、直线与平面垂直、平面与平面垂直、直线与平面所成的角等基础知识．考查空间想象能力和推理论证能力．满分 13 分．



（Ⅰ）**证明**：连接BD，易知$AC\cap BD=H$，$BH=DH$．又由$BG=PG$，故$GH\parallel PD$．又因为$GH\not\subset$平面PAD，$PD\subset$平面PAD，所以$GH\parallel$平面PAD．

（Ⅱ）**证明**：取棱PC的中点N，连接DN．依题意，得$DN\perp PC$．又因为平面$PAC\perp$平面PCD，平面$PAC\cap$平面$PCD=PC$，所以$DN\perp$平面PAC，又$PA\subset$平面PAC，故$DN\perp PA$．又已知$PA\perp CD$，$CD\cap DN=D$，所以$PA\perp$平面PCD．

（Ⅲ）**解**：连接AN，由（Ⅱ）中$DN\perp$平面PAC，可知$\angle DAN$为直线AD与平面PAC所成的角．

因为$\triangle PCD$为等边三角形，$CD=2$且N为PC的中点，所以$DN=\sqrt{3}$．又$DN\perp AN$，在$\mathrm{Rt}\triangle AND$中，$\sin\angle DAN=\dfrac{DN}{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

所以，直线AD与平面PAC所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

（18）本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及其前 n 项和公式等基础知识．考查数列求和的基本方法和运算求解能力．满分 13 分．

（Ⅰ）**解：** 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q．依题意，得

$\begin{cases}3q=3+2d,\\3q^2=15+4d,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}d=3,\\q=3,\end{cases}$ 故 $a_n=3+3(n-1)=3n$，$b_n=3\times3^{n-1}=3^n$．

所以，$\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n$，$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=3^n$．

（Ⅱ）**解：**

$$a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}$$

$$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})+(a_2b_1+a_4b_2+a_6b_3+\cdots+a_{2n}b_n)$$

$$=\left[n\times3+\frac{n(n-1)}{2}\times6\right]+(6\times3^1+12\times3^2+18\times3^3+\cdots+6n\times3^n)$$

$$=3n^2+6(1\times3^1+2\times3^2+\cdots+n\times3^n).$$

记 $T_n=1\times3^1+2\times3^2+\cdots+n\times3^n$，①

则 $3T_n=1\times3^2+2\times3^3+\cdots+n\times3^{n+1}$，②

②－①得，$2T_n=-3-3^2-3^3-\cdots-3^n+n\times3^{n+1}=-\dfrac{3(1-3^n)}{1-3}+n\times3^{n+1}=\dfrac{(2n-1)3^{n+1}+3}{2}$．

所以，$a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}=3n^2+6T_n=3n^2+3\times\dfrac{(2n-1)3^{n+1}+3}{2}$

$$=\frac{(2n-1)3^{n+2}+6n^2+9}{2}\ (n\in\mathbf{N}^*).$$

（19）本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程、圆等基础知识．考查用代数方法研究圆锥曲线的性质．考查运算求解能力，以及用方程思想、数形结合思想解决问题的能力．满分 14 分．

（Ⅰ）**解：** 设椭圆的半焦距为 c，由已知有 $\sqrt{3}a=2b$，又由 $a^2=b^2+c^2$，消去 b 得

$a^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+c^2$，解得 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$．

所以，椭圆的离心率为 $\dfrac{1}{2}$．

（Ⅱ）**解**：由（Ⅰ）知，$a=2c$，$b=\sqrt{3}c$，故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$．由题意，$F(-c,0)$，则直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{4}(x+c)$．点 P 的坐标满足 $\begin{cases}\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1,\\ y=\frac{3}{4}(x+c),\end{cases}$ 消去 y 并化简，得到 $7x^2+6cx-13c^2=0$，解得 $x_1=c$，$x_2=-\frac{13c}{7}$．代入到 l 的方程，解得 $y_1=\frac{3}{2}c$，$y_2=-\frac{9}{14}c$．因为点 P 在 x 轴上方，所以 $P\left(c,\frac{3}{2}c\right)$．

由圆心 C 在直线 $x=4$ 上，可设 $C(4,t)$．因为 $OC\,/\!/\,AP$，且由（Ⅰ）知 $A(-2c,0)$，故 $\frac{t}{4}=\frac{\frac{3}{2}c}{c+2c}$，解得 $t=2$．因为圆 C 与 x 轴相切，所以圆的半径长为 2，又由圆 C 与 l 相切，得 $\frac{\left|\frac{3}{4}(4+c)-2\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}}=2$，可得 $c=2$．

所以，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$．

（20）本小题主要考查导数的运算、不等式证明、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法．考查函数思想、化归与转化思想．考查综合分析问题和解决问题的能力．满分 14 分．

（Ⅰ）**解**：由已知，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\left[ae^x+a(x-1)e^x\right]=\frac{1-ax^2e^x}{x}.$$

因此当 $a\leqslant 0$ 时，$1-ax^2e^x>0$，从而 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增．

（Ⅱ）**证明**：（ⅰ）由（Ⅰ）知，$f'(x)=\frac{1-ax^2e^x}{x}$．令 $g(x)=1-ax^2e^x$，由 $0<a<\frac{1}{e}$，可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减，又 $g(1)=1-ae>0$，且

$$g\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1-a\left(\ln\frac{1}{a}\right)^2\frac{1}{a}=1-\left(\ln\frac{1}{a}\right)^2<0,$$

故$g(x)=0$在$(0,+\infty)$内有唯一解，从而$f'(x)=0$在$(0,+\infty)$内有唯一解，不妨设为x_0，则$1<x_0<\ln\dfrac{1}{a}$．当$x\in(0,x_0)$时，$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}>\dfrac{g(x_0)}{x}=0$，所以$f(x)$在$(0,x_0)$内单调递增；当$x\in(x_0,+\infty)$时，$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}<\dfrac{g(x_0)}{x}=0$，所以$f(x)$在$(x_0,+\infty)$内单调递减，因此$x_0$是$f(x)$的唯一极值点．

令$h(x)=\ln x-x+1$，则当$x>1$时，$h'(x)=\dfrac{1}{x}-1<0$，故$h(x)$在$(1,+\infty)$内单调递减，从而当$x>1$时，$h(x)<h(1)=0$，所以$\ln x<x-1$．从而

$$f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=\ln\ln\frac{1}{a}-a\left(\ln\frac{1}{a}-1\right)e^{\ln\frac{1}{a}}=\ln\ln\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}+1=h\left(\ln\frac{1}{a}\right)<0,$$

又因为$f(x_0)>f(1)=0$，所以$f(x)$在$(x_0,+\infty)$内有唯一零点．又$f(x)$在$(0,x_0)$内有唯一零点1，从而，$f(x)$在$(0,+\infty)$内恰有两个零点．

（ⅱ）由题意，$\begin{cases}f'(x_0)=0,\\ f(x_1)=0,\end{cases}$即$\begin{cases}ax_0^2e^{x_0}=1,\\ \ln x_1=a(x_1-1)e^{x_1},\end{cases}$从而$\ln x_1=\dfrac{x_1-1}{x_0^2}e^{x_1-x_0}$，即$e^{x_1-x_0}=\dfrac{x_0^2\ln x_1}{x_1-1}$．因为当$x>1$时，$\ln x<x-1$，又$x_1>x_0>1$，故$e^{x_1-x_0}<\dfrac{x_0^2(x_1-1)}{x_1-1}=x_0^2$，两边取对数，得$\ln e^{x_1-x_0}<\ln x_0^2$，于是

$$x_1-x_0<2\ln x_0<2(x_0-1),$$

整理得$3x_0-x_1>2$．