绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数　　学（理工类）

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利!

第Ⅰ卷

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2．本卷共8小题，每小题5分，共40分。

参考公式：

- 如果事件 A ，B 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
- 如果事件 A ，B 相互独立，那么 $P(AB)=P(A)P(B)$.
- 圆柱的体积公式 $V=Sh$，其中 S 表示圆柱的底面面积，h 表示圆柱的高.
- 棱锥的体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 表示棱锥的底面面积，h 表示棱锥的高.

一．选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

（1）设集合 $A=\{-1,1,2,3,5\}$，$B=\{2,3,4\}$，$C=\{x\in\mathbf{R}\,|\,1\leqslant x<3\}$，则 $(A\cap C)\cup B=$

（A）$\{2\}$　　（B）$\{2,3\}$　　（C）$\{-1,2,3\}$　　（D）$\{1,2,3,4\}$

（2）设变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\leqslant 0,\\ x-y+2\geqslant 0,\\ x\geqslant -1,\\ y\geqslant -1,\end{cases}$ 则目标函数 $z=-4x+y$ 的最大值为

（A）2　　（B）3　　（C）5　　（D）6

（3）设$x\in\mathbf{R}$，则“$x^2-5x<0$”是“$|x-1|<1$”的

（A）充分而不必要条件

（B）必要而不充分条件

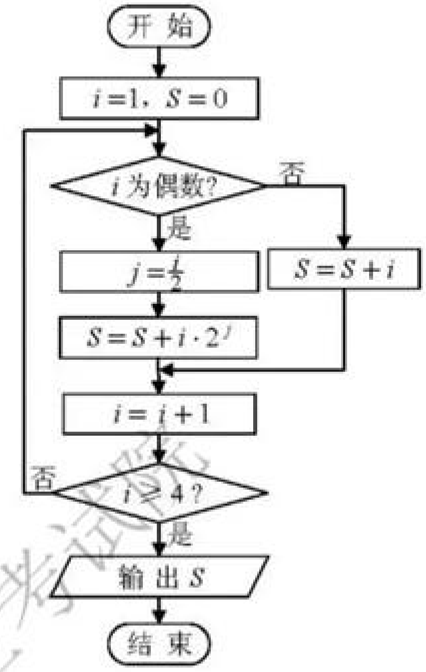
（C）充要条件

（D）既不充分也不必要条件

（4）阅读右边的程序框图，运行相应的程序，输出S的值为

（A）5　　（B）8

（C）24　　（D）29



第（4）题图

（5）已知抛物线$y^2=4x$的焦点为F，准线为l．若l与双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的两条渐近线分别交于点$A$和点$B$，且$|AB|=4|OF|$（$O$为原点），则双曲线的离心率为

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{3}$

（C）2　　（D）$\sqrt{5}$

（6）已知$a=\log_5 2$，$b=\log_{0.5}0.2$，$c=0.5^{0.2}$，则a，b，c的大小关系为

（A）$a<c<b$　　（B）$a<b<c$　　（C）$b<c<a$　　（D）$c<a<b$

（7）已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\pi$）是奇函数，将$y=f(x)$的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），所得图象对应的函数为$g(x)$．若$g(x)$的最小正周期为2π，且$g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，则$f\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)=$

（A）-2　　（B）$-\sqrt{2}$　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）2

（8）已知$a\in\mathbf{R}$．设函数$f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+2a, & x\leqslant 1,\\ x-a\ln x, & x>1.\end{cases}$若关于$x$的不等式$f(x)\geqslant 0$在$\mathbf{R}$上恒成立，则$a$的取值范围为

（A）$[0,1]$　　（B）$[0,2]$　　（C）$[0,\mathrm{e}]$　　（D）$[1,\mathrm{e}]$

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数　　学（理工类）

第Ⅱ卷

注意事项：

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2．本卷共12小题，共110分。

二．填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分．

（9）i是虚数单位，则$\left|\dfrac{5-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|$的值为____________．

（10）$\left(2x-\dfrac{1}{8x^3}\right)^8$的展开式中的常数项为____________．

（11）已知四棱锥的底面是边长为$\sqrt{2}$的正方形，侧棱长均为$\sqrt{5}$．若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点，另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心，则该圆柱的体积为____________．

（12）设$a\in\mathbf{R}$，直线$ax-y+2=0$和圆$\begin{cases}x=2+2\cos\theta,\\ y=1+2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）相切，则$a$的值为____________．

（13）设$x>0$，$y>0$，$x+2y=5$，则$\dfrac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$的最小值为____________．

（14）在四边形$ABCD$中，$AD/\!/BC$，$AB=2\sqrt{3}$，$AD=5$，$\angle A=30^\circ$，点E在线段CB的延长线上，且$AE=BE$，则$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=$____________．

三．解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

（15）（本小题满分 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．已知 $b+c=2a$，$3c\sin B=4a\sin C$．

（Ⅰ）求 $\cos B$ 的值；

（Ⅱ）求 $\sin\left(2B+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值．

（16）（本小题满分 13 分）

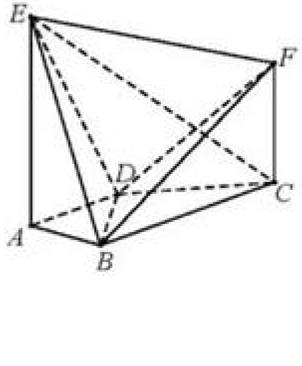
设甲、乙两位同学上学期间，每天 7:30 之前到校的概率均为 $\dfrac{2}{3}$．假定甲、乙两位同学到校情况互不影响，且任一同学每天到校情况相互独立．

（Ⅰ）用 X 表示甲同学上学期间的三天中 7:30 之前到校的天数，求随机变量 X 的分布列和数学期望；

（Ⅱ）设 M 为事件“上学期间的三天中，甲同学在 7:30 之前到校的天数比乙同学在 7:30 之前到校的天数恰好多 2”，求事件 M 发生的概率．

（17）（本小题满分 13 分）

如图，$AE\perp$ 平面 $ABCD$，$CF\,/\!/\,AE$，$AD\,/\!/\,BC$，$AD\perp AB$，$AB=AD=1$，$AE=BC=2$．



（Ⅰ）求证：$BF\,/\!/$ 平面 ADE；

（Ⅱ）求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值；

（Ⅲ）若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$，求线段 CF 的长．

（18）（**本小题满分 13 分**）

设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左焦点为 F，上顶点为 B．已知椭圆的短轴长为 4，离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）设点 P 在椭圆上，且异于椭圆的上、下顶点，点 M 为直线 PB 与 x 轴的交点，点 N 在 y 轴的负半轴上．若 $|ON|=|OF|$（O 为原点），且 $OP\perp MN$，求直线 PB 的斜率．

（19）（**本小题满分 14 分**）

设 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列．已知 $a_1=4$，$b_1=6$，$b_2=2a_2-2$，$b_3=2a_3+4$．

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1=1$，$c_n=\begin{cases}1, & 2^k<n<2^{k+1},\\ b_k, & n=2^k,\end{cases}$ 其中 $k\in\mathbf{N}^*$．

（ⅰ）求数列 $\left\{a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)\right\}$ 的通项公式；

（ⅱ）求 $\sum\limits_{i=1}^{2^n}a_ic_i$（$n\in\mathbf{N}^*$）．

（20）（**本小题满分 14 分**）

设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x$，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，证明 $f(x)+g(x)\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\geqslant 0$；

（Ⅲ）设 x_n 为函数 $u(x)=f(x)-1$ 在区间 $\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{4},2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的零点，其中 $n\in\mathbf{N}$，证明 $2n\pi+\dfrac{\pi}{2}-x_n<\dfrac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{\sin x_0-\cos x_0}$．