2019年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学·参考答案

一、选择题

1．A　2．D　3．D　4．C　5．B　6．C　7．D　8．B　9．C　10．B　11．A　12．C

二、填空题

13．$-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　　14．100　　15．$(3,\sqrt{15})$　　16．118.8

三、解答题

17．解：（1）由已知得0.70=a+0.20+0.15，故a=0.35．

b=1–0.05–0.15–0.70=0.10．

（2）甲离子残留百分比的平均值的估计值为

2×0.15+3×0.20+4×0.30+5×0.20+6×0.10+7×0.05=4.05．

乙离子残留百分比的平均值的估计值为

3×0.05+4×0.10+5×0.15+6×0.35+7×0.20+8×0.15=6.00．

18．解：（1）由题设及正弦定理得$\sin A\sin\dfrac{A+C}{2}=\sin B\sin A$.

因为$\sin A\neq 0$，所以$\sin\dfrac{A+C}{2}=\sin B$.

由$A+B+C=180^{\circ}$，可得$\sin\dfrac{A+C}{2}=\cos\dfrac{B}{2}$，故$\cos\dfrac{B}{2}=2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$.

因为$\cos\dfrac{B}{2}\neq 0$，故$\sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}$，因此$B$=60°.

（2）由题设及（1）知$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$.

由正弦定理得$a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sin\left(120^{\circ}-C\right)}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\dfrac{1}{2}$.

由于$\triangle ABC$为锐角三角形，故0°<A<90°，0°<C<90°.由（1）知A+C=120°，所以30°<C<90°，故$\dfrac{1}{2}<a<2$，

从而$\frac{\sqrt{3}}{8} < S_{\triangle ABC} < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

因此，$\triangle ABC$面积的取值范围是$\left(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

19．解：（1）由已知得$AD /\!/ BE$，$CG /\!/ BE$，所以$AD /\!/ CG$，故AD，CG确定一个平面，从而A，C，G，D四点共面．

由已知得$AB \perp BE$，$AB \perp BC$，故$AB \perp$平面$BCGE$．

又因为$AB \subset$平面ABC，所以平面$ABC \perp$平面$BCGE$．

（2）取CG的中点M，连结EM，DM.

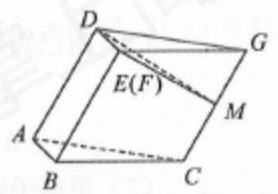
因为$AB /\!/ DE$，$AB \perp$平面$BCGE$，所以$DE \perp$平面$BCGE$，故$DE \perp CG$.

由已知，四边形$BCGE$是菱形，且$\angle EBC=60°$得$EM \perp CG$，故$CG \perp$平面DEM.

因此$DM \perp CG$．

在Rt$\triangle DEM$中，$DE=1$，$EM=\sqrt{3}$，故$DM=2$．

所以四边形$ACGD$的面积为4．



20．解：（1）$f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$.

令$f'(x)=0$，得$x=0$或$x=\frac{a}{3}$.

若$a>0$，则当$x \in (-\infty,0) \cup \left(\frac{a}{3},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$；当$x \in \left(0,\frac{a}{3}\right)$时，$f'(x)<0$．故$f(x)$在$(-\infty,0),\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$单调递增，在$\left(0,\frac{a}{3}\right)$单调递减；

若$a=0$，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递增；

若$a<0$，则当$x \in \left(-\infty,\frac{a}{3}\right) \cup (0,+\infty)$时，$f'(x)>0$；当$x \in \left(\frac{a}{3},0\right)$时，$f'(x)<0$．故$f(x)$在

$\left(-\infty,\dfrac{a}{3}\right),(0,+\infty)$ 单调递增，在 $\left(\dfrac{a}{3},0\right)$ 单调递减.

（2）当 $0<a<3$ 时，由（1）知，$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{a}{3}\right)$ 单调递减，在 $\left(\dfrac{a}{3},1\right)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 的最小值为 $f\left(\dfrac{a}{3}\right)=-\dfrac{a^3}{27}+2$，最大值为 $f(0)=2$ 或 $f(1)=4-a$.于是

$m=-\dfrac{a^3}{27}+2$，$M=\begin{cases}4-a,0<a<2,\\2,2\le a<3.\end{cases}$

所以 $M-m=\begin{cases}2-a+\dfrac{a^3}{27},0<a<2,\\\dfrac{a^3}{27},2\le a<3.\end{cases}$

当 $0<a<2$ 时，可知 $2-a+\dfrac{a^3}{27}$ 单调递减，所以 $M-m$ 的取值范围是 $\left(\dfrac{8}{27},2\right)$.

当 $2\le a<3$ 时，$\dfrac{a^3}{27}$ 单调递增，所以 $M-m$ 的取值范围是 $[\dfrac{8}{27},1)$.

综上，$M-m$ 的取值范围是 $[\dfrac{8}{27},2)$.

21．解：（1）设 $D\left(t,-\dfrac{1}{2}\right)$，$A(x_1,y_1)$，则 $x_1^2=2y_1$.

由于 $y'=x$，所以切线DA的斜率为 x_1，故 $\dfrac{y_1+\frac{1}{2}}{x_1-t}=x_1$.

整理得 $2tx_1-2y_1+1=0$.

设 $B(x_2,y_2)$，同理可得 $2tx_2-2y_2+1=0$.

故直线AB的方程为 $2tx-2y+1=0$.

所以直线AB过定点 $(0,\dfrac{1}{2})$.

（2）由（1）得直线AB的方程为 $y=tx+\dfrac{1}{2}$.

由$\begin{cases} y=tx+\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$，可得$x^2-2tx-1=0$.

于是$x_1+x_2=2t, y_1+y_2=t\left(x_1+x_2\right)+1=2t^2+1$.

设M为线段AB的中点，则$M\left(t,t^2+\dfrac{1}{2}\right)$.

由于$\overrightarrow{EM}\perp\overrightarrow{AB}$，而$\overrightarrow{EM}=\left(t,t^2-2\right)$，$\overrightarrow{AB}$与向量$(1,t)$平行，所以$t+\left(t^2-2\right)t=0$. 解得$t$=0或$t=\pm1$.

当t=0时，$|\overrightarrow{EM}|$=2，所求圆的方程为$x^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=4$；

当$t=\pm1$时，$|\overrightarrow{EM}|=\sqrt{2}$，所求圆的方程为$x^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=2$.

22. 解:（1）由题设可得，弧$\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{CD}$所在圆的极坐标方程分别为$\rho=2\cos\theta$，$\rho=2\sin\theta$，$\rho=-2\cos\theta$.

所以M_1的极坐标方程为$\rho=2\cos\theta\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\right)$，$M_2$的极坐标方程为$\rho=2\sin\theta\left(\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{3\pi}{4}\right)$，

M_3的极坐标方程为$\rho=-2\cos\theta\left(\dfrac{3\pi}{4}\le\theta\le\pi\right)$.

（2）设$P(\rho,\theta)$，由题设及（1）知

若$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$，则$2\cos\theta=\sqrt{3}$，解得$\theta=\dfrac{\pi}{6}$；

若$\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{3\pi}{4}$，则$2\sin\theta=\sqrt{3}$，解得$\theta=\dfrac{\pi}{3}$或$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$；

若$\dfrac{3\pi}{4}\le\theta\le\pi$，则$-2\cos\theta=\sqrt{3}$，解得$\theta=\dfrac{5\pi}{6}$.

综上，P的极坐标为$\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{6}\right)$或$\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$或$\left(\sqrt{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$或$\left(\sqrt{3},\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

23．解：（1）由于$[(x-1)+(y+1)+(z+1)]^2$

$=(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2+2[(x-1)(y+1)+(y+1)(z+1)+(z+1)(x-1)]$

$\le3\left[(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\right]$，

故由已知得$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\geq\dfrac{4}{3}$，

当且仅当$x=\dfrac{5}{3}$，$y=-\dfrac{1}{3}$，$z=-\dfrac{1}{3}$时等号成立.

所以$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$的最小值为$\dfrac{4}{3}$.

（2）由于

$[(x-2)+(y-1)+(z-a)]^2$

$=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2+2[(x-2)(y-1)+(y-1)(z-a)+(z-a)(x-2)]$

$\leq 3\left[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\right]$，

故由已知得$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\geq\dfrac{(2+a)^2}{3}$，

当且仅当$x=\dfrac{4-a}{3}$，$y=\dfrac{1-a}{3}$，$z=\dfrac{2a-2}{3}$时等号成立.

因此$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2$的最小值为$\dfrac{(2+a)^2}{3}$.

由题设知$\dfrac{(2+a)^2}{3}\geq\dfrac{1}{3}$，解得$a\leq-3$或$a\geq-1$.