2018 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学参考答案（全国卷III）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	D	A	B	C	A	D	B	C	B	C	B

13. $\frac{1}{2}$　　14. -3　　15. 3　　16. 2

17.(12 分)

解：（1）设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由题设得 $a_n = q^{n-1}$.

由已知得 $q^4 = 4q^2$，解得 $q = 0$（舍去），$q = -2$ 或 $q = 2$.

故 $a_n = (-2)^{n-1}$ 或 $a_n = 2^{n-1}$.

（2）若 $a_n=(-2)^{n-1}$，则 $S_n=\frac{1-(-2)^n}{3}$.由 $S_m=63$ 得 $(-2)^m=-188$，此方程没有正整数解.

若 $a_n=2^{n-1}$，则 $S_n=2^n-1$.由 $S_m=63$ 得 $2^m=64$，解得 $m=6$.

综上，$m=6$.

18.（12 分）

解：（1）第二种生产方式的效率更高.

理由如下：

（i）由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人中，有 75%的工人完成生产任务所需时间至少 80 分钟，用第二种生产方式的工人中，有 75%的工人完成生产任务所需时间至多 79 分钟.因此第二种生产方式的效率更高.

（ii）由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人完成生产任务所需时间的中位数为 85.5 分钟，用第二种生产方式的工人完成生产任务所需时间的中位数为 73.5 分钟.因此第二种生产方式的效率更高.

（iii）由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人完成生产任务平均所需时间高于 80 分钟；用第二种生产方式的工人完成生产任务平均所需时间低于 80 分钟，因此第二种生产方式的效率更高.

（iv）由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布在茎 8 上的最多，关于茎 8 大致呈对称分布；用第二种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布在茎 7 上的最多，关于茎 7 大致呈对称分布，又用两种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布的区间相同，故可以认为用第二种生产方式完成生产任务所需的时间比用第一种生产方式完成生产任务所需的时间更少，因此第二种生产方式的效率更高.

以上给出了 4 种理由，考生答出其中任意一种或其他合理理由均可得分.

（2）由茎叶图知 $m=\frac{79+81}{2}=80$.

列联表如下：

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式	15	5
第二种生产方式	5	15

（3）由于 $K^2=\frac{40(15\times15-5\times5)^2}{20\times20\times20\times20}=10>6.635$，所以有 99%的把握认为两种生产方

式的效率有差异.

19.（12 分）

解：（1）由题设知,平面 $CMD\perp$ 平面 $ABCD$,交线为 CD.因为 $BC\perp CD$,$BC\subset$ 平面 $ABCD$,

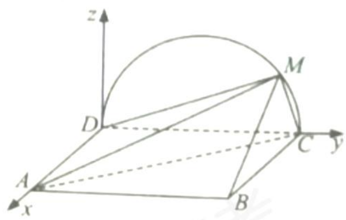
所以 $BC\perp$ 平面 CMD,故 $BC\perp DM$.

因为 M 为 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C，D 的点,且 DC 为直径，所以 $DM\perp CM$.

又 $BC\cap CM=C$,所以 $DM\perp$ 平面 BMC.

而 $DM\subset$ 平面 AMD,故平面 $AMD\perp$ 平面 BMC.

（2）以 D 为坐标原点,$\overrightarrow{DA}$ 的方向为 x 轴正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $D\text{-}xyz$.



当三棱锥 $M\text{-}ABC$ 体积最大时，M 为 $\overset{\frown}{CD}$ 的中点.

由题设得 $D(0,0,0),A(2,0,0),B(2,2,0),C(0,2,0),M(0,1,1)$，

$\overrightarrow{AM}=(-2,1,1),\overrightarrow{AB}=(0,2,0),\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 MAB 的法向量,则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+y+z=0,\\ 2y=0.\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$.

$\overrightarrow{DA}$ 是平面 MCD 的法向量,因此

$$\cos\left\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DA}\right\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DA}|}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\sin\left\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DA}\right\rangle=\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

所以面 MAB 与面 MCD 所成二面角的正弦值是 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

20.（12 分）

解：（1）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1,\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$.

两式相减，并由 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k$ 得

$$\frac{x_1+x_2}{4}+\frac{y_1+y_2}{3}\cdot k=0.$$

由题设知 $\frac{x_1+x_2}{2}=1,\frac{y_1+y_2}{2}=m$，于是

$$k=-\frac{3}{4m}.①$$

由题设得 $0<m<\frac{3}{2}$，故 $k<-\frac{1}{2}$.

（2）由题意得 $F(1,0)$，设 $P(x_3,y_3)$，则

$$(x_3-1,y_3)+(x_1-1,y_1)+(x_2-1,y_2)=(0,0).$$

由（1）及题设得 $x_3=3-(x_1+x_2)=1,y_3=-(y_1+y_2)=-2m<0$.

又点 P 在 C 上，所以 $m=\frac{3}{4}$，从而 $P(1,-\frac{3}{2})$，$|\overrightarrow{FP}|=\frac{3}{2}$.

于是

$$|\overrightarrow{FA}|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-1)^2+3(1-\frac{x_1^2}{4})}=2-\frac{x_1}{2}.$$

同理 $|\overrightarrow{FB}|=2-\frac{x_2}{2}$.

所以 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=4-\frac{1}{2}(x_1+x_2)=3$.

故 $2|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|$，即 $|\overrightarrow{FA}|,|\overrightarrow{FP}|,|\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列.

设该数列的公差为 d，则

$$2|d|=||\overrightarrow{FB}|-|\overrightarrow{FA}||=\frac{1}{2}|x_1-x_2|=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\text{ .②}$$

将$m=\frac{3}{4}$代入①得$k=-1$.

所以l的方程为$y=-x+\frac{7}{4}$，代入C的方程，并整理得$7x^2-14x+\frac{1}{4}=0$.

故$x_1+x_2=2,x_1x_2=\frac{1}{28}$，代入②解得$|d|=\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

所以该数列的公差为$\frac{3\sqrt{21}}{28}$或$-\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

21.(12 分)

解：（1）当$a=0$时，$f(x)=(2+x)\ln(1+x)-2x$，$f'(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$.

设函数$g(x)=f'(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$，则$g'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$.

当$-1<x<0$时，$g'(x)<0$；当$x>0$时，$g'(x)>0$.故当$x>-1$时，$g(x)\ge g(0)=0$，

且仅当$x=0$时，$g(x)=0$，从而$f'(x)\ge 0$，且仅当$x=0$时，$f'(x)=0$.

所以$f(x)$在$(-1,+\infty)$单调递增.

又$f(0)=0$，故当$-1<x<0$时，$f(x)<0$；当$x>0$时，$f(x)>0$.

（2）(i) 若$a\ge 0$，由（1）知，当$x>0$时，$f(x)\ge(2+x)\ln(1+x)-2x>0=f(0)$，

这与$x=0$是$f(x)$的极大值点矛盾.

（ii）若$a<0$，设函数$h(x)=\frac{f(x)}{2+x+ax^2}=\ln(1+x)-\frac{2x}{2+x+ax^2}$.

由于当$|x|<\min\{1,\sqrt{\frac{1}{|a|}}\}$时，$2+x+ax^2>0$，故$h(x)$与$f(x)$符号相同.

又$h(0)=f(0)=0$，故$x=0$是$f(x)$的极大值点当且仅当$x=0$是$h(x)$的极大值点.

$h'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{2(2+x+ax^2)-2x(1+2ax)}{(2+x+ax^2)^2}=\frac{x^2(a^2x^2+4ax+6a+1)}{(x+1)(ax^2+x+2)^2}$.

如果$6a+1>0$，则当$0<x<-\frac{6a+1}{4a}$，且$|x|<\min\{1,\sqrt{\frac{1}{|a|}}\}$时，$h'(x)>0$，故$x=0$不是$h(x)$的极大值点.

如果$6a+1<0$，则$a^2x^2+4ax+6a+1=0$存在根$x_1<0$，故当$x\in(x_1,0)$，且$|x|<\min\{1,\sqrt{\frac{1}{|a|}}\}$时，$h'(x)<0$，所以$x=0$不是$h(x)$的极大值点.

如果$6a+1=0$，则$h'(x)=\frac{x^3(x-24)}{(x+1)(x^2-6x-12)^2}$.则当$x\in(-1,0)$时，$h'(x)>0$；当$x\in(0,1)$时，$h'(x)<0$.所以$x=0$是$h(x)$的极大值点，从而$x=0$是$f(x)$的极大值点

综上，$a=-\frac{1}{6}$.

22. [选修4—4：坐标系与参数方程]（10分）

【解析】(1) $\odot O$的直角坐标方程为$x^2+y^2=1$.

当$\alpha=\frac{\pi}{2}$时，l与$\odot O$交于两点.

当$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$时，记$\tan\alpha=k$，则l的方程为$y=kx-\sqrt{2}$. l与$\odot O$交于两点当且仅当$|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+k^2}}|<1$，解得$k<-1$或$k>1$，即$\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$或$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$.

综上，α的取值范围是$(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$.

(2) l的参数方程为$\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=-\sqrt{2}+t\sin\alpha\end{cases}$($t$为参数，$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$).

设A，B，P对应的参数分别为t_A，t_B，t_P，则$t_P=\frac{t_A+t_B}{2}$，且t_A，t_B满足$t^2-2\sqrt{2}t\sin\alpha+1=0$.

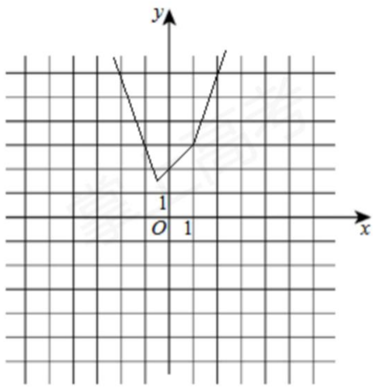
于是$t_A+t_B=2\sqrt{2}\sin\alpha$，$t_P=\sqrt{2}\sin\alpha$. 又点$P$的坐标$(x,y)$满足

$$\begin{cases} x = t_P \cos\alpha, \\ y = -\sqrt{2} + t_P \sin\alpha. \end{cases}$$

所以点 P 的轨迹的参数方程是 $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha, \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 为参数，$\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{3\pi}{4}$）.

23．[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

【解析】（1）$f(x) = \begin{cases} -3x, x < -\dfrac{1}{2}, \\ x+2, -\dfrac{1}{2} \le x < 1, \\ 3x, x \ge 1. \end{cases}$ $y = f(x)$ 的图像如图所示.



（2）由（1）知，$y = f(x)$ 的图像与 y 轴交点的纵坐标为 2，且各部分所在直线斜率的最大值为 3，故当且仅当 $a \ge 3$ 且 $b \ge 2$ 时，$f(x) \le ax + b$ 在 $[0, +\infty)$ 成立，因此 $a+b$ 的最小值为 5