2019年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学·参考答案

一、选择题

1．A　2．D　3．C　4．A　5．C　6．D　7．B　8．B　9．C　10．A　11．C　12．D

二、填空题

13．$\frac{2}{3}$　14．4　15．$(3,\sqrt{15})$　16．118.8

三、解答题

17．解：（1）由已知得0.70=a+0.20+0.15，故a=0.35．

b=1–0.05–0.15–0.70=0.10．

（2）甲离子残留百分比的平均值的估计值为

2×0.15+3×0.20+4×0.30+5×0.20+6×0.10+7×0.05=4.05．

乙离子残留百分比的平均值的估计值为

3×0.05+4×0.10+5×0.15+6×0.35+7×0.20+8×0.15=6.00．

18．解：（1）由题设及正弦定理得$\sin A\sin\frac{A+C}{2}=\sin B\sin A$.

因为$\sin A\neq 0$，所以$\sin\frac{A+C}{2}=\sin B$.

由$A+B+C=180^{\circ}$，可得$\sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2}$，故$\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$.

因为$\cos\frac{B}{2}\neq 0$，故$\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$，因此$B$=60°.

（2）由题设及（1）知△ABC的面积$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a$.

由正弦定理得$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{\sin\left(120^{\circ}-C\right)}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}$.

由于△ABC为锐角三角形，故0°<A<90°，0°<C<90°，由（1）知A+C=120°，所以30°<C<90°，故$\frac{1}{2}<a<2$，

从而$\frac{\sqrt{3}}{8}<S_{\triangle ABC}<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因此，$\triangle ABC$面积的取值范围是$\left(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

19．解：（1）由已知得$AD /\!/ BE$，$CG /\!/ BE$，所以$AD /\!/ CG$，故AD，CG确定一个平面，从而A，C，G，D四点共面.

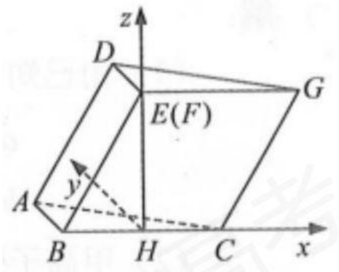
由已知得$AB\perp BE$，$AB\perp BC$，故$AB\perp$平面$BCGE$.

又因为$AB\subset$平面ABC，所以平面$ABC\perp$平面$BCGE$.

（2）作$EH\perp BC$，垂足为H．因为$EH\subset$平面$BCGE$，平面$BCGE\perp$平面ABC，所以$EH\perp$平面ABC.

由已知，菱形$BCGE$的边长为2，$\angle EBC$=60°，可求得BH=1，$EH=\sqrt{3}$.

以H为坐标原点，$\overrightarrow{HC}$的方向为x轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系$H–xyz$，



则A（–1，1，0），C（1，0，0），G（2，0，$\sqrt{3}$），$\overrightarrow{CG}$=（1，0，$\sqrt{3}$），$\overrightarrow{AC}$=（2，–1，0）.

设平面$ACGD$的法向量为$\boldsymbol{n}$=（x，y，z），则

$$\begin{cases}\overrightarrow{CG}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0,\\ 2x-y=0.\end{cases}$$

所以可取$\boldsymbol{n}$=（3，6，$-\sqrt{3}$）.

又平面$BCGE$的法向量可取为$\boldsymbol{m}$=（0，1，0），所以$\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因此二面角$B–CG–A$的大小为30°.

20. 解：(1) $f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$.

令$f'(x)=0$，得x=0或$x=\frac{a}{3}$.

若a>0，则当$x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$；当$x\in\left(0,\frac{a}{3}\right)$时，$f'(x)<0$．故$f(x)$在

$(-\infty,0),\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$单调递增，在$\left(0,\frac{a}{3}\right)$单调递减；

若 a=0，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递增；

若 a<0，则当$x\in\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)\cup(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$；当$x\in\left(\frac{a}{3},0\right)$时，$f'(x)<0$．故$f(x)$在$\left(-\infty,\frac{a}{3}\right),(0,+\infty)$单调递增，在$\left(\frac{a}{3},0\right)$单调递减.

（2）满足题设条件的 a，b 存在.

（i）当 $a\leqslant 0$ 时，由（1）知，$f(x)$在[0，1]单调递增，所以$f(x)$在区间[0，1]的最小值为$f(0)=b$，最大值为$f(1)=2-a+b$.此时 a，b 满足题设条件当且仅当$b=-1$，$2-a+b=1$，即 a=0，$b=-1$.

（ii）当 $a\geqslant 3$ 时，由（1）知，$f(x)$在[0，1]单调递减，所以$f(x)$在区间[0，1]的最大值为$f(0)=b$，最小值为$f(1)=2-a+b$．此时 a，b 满足题设条件当且仅当$2-a+b=-1$，b=1，即 a=4，b=1.

（iii）当 0<a<3 时，由（1）知，$f(x)$在[0，1]的最小值为$f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+b$，最大值为 b 或$2-a+b$.

若$-\frac{a^3}{27}+b=-1$，b=1，则$a=3\sqrt[3]{2}$，与 0<a<3 矛盾.

若$-\frac{a^3}{27}+b=-1$，$2-a+b=1$，则$a=3\sqrt{3}$或$a=-3\sqrt{3}$或 a=0，与 0<a<3 矛盾.

综上，当且仅当 a=0，$b=-1$或 a=4，b=1 时，$f(x)$在[0，1]的最小值为-1，最大值为 1.

21．解：（1）设$D\left(t,-\frac{1}{2}\right)$，$A(x_1,y_1)$，则$x_1^2=2y_1$.

由于$y'=x$，所以切线DA的斜率为x_1，故$\frac{y_1+\frac{1}{2}}{x_1-t}=x_1$．

整理得$2tx_1-2y_1+1=0$.

设$B(x_2,y_2)$，同理可得$2tx_2-2y_2+1=0$.

故直线AB的方程为$2tx-2y+1=0$.

所以直线AB过定点$(0,\frac{1}{2})$.

（2）由（1）得直线AB的方程为$y=tx+\frac{1}{2}$.

由$\begin{cases} y=tx+\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$，可得$x^2-2tx-1=0$.

于是$x_1+x_2=2t,\quad x_1x_2=-1,\quad y_1+y_2=t\left(x_1+x_2\right)+1=2t^2+1$，

$|AB|=\sqrt{1+t^2}\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{1+t^2}\times\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=2\left(t^2+1\right)$.

设d_1,d_2分别为点D，E到直线AB的距离，则$d_1=\sqrt{t^2+1},\quad d_2=\dfrac{2}{\sqrt{t^2+1}}$.

因此，四边形$ADBE$的面积$S=\frac{1}{2}|AB|\left(d_1+d_2\right)=\left(t^2+3\right)\sqrt{t^2+1}$.

设M为线段AB的中点，则$M\left(t,t^2+\dfrac{1}{2}\right)$.

由于$\overrightarrow{EM}\perp\overrightarrow{AB}$，而$\overrightarrow{EM}=\left(t,t^2-2\right)$，$\overrightarrow{AB}$与向量$(1,t)$平行，所以$t+\left(t^2-2\right)t=0$.解得$t$=0或$t=\pm1$.

当t=0时，S=3；当$t=\pm1$时，$S=4\sqrt{2}$.

因此，四边形$ADBE$的面积为3或$4\sqrt{2}$.

22.解:(1)由题设可得,弧$\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{CD}$所在圆的极坐标方程分别为$\rho=2\cos\theta$，$\rho=2\sin\theta$，$\rho=-2\cos\theta$.

所以M_1的极坐标方程为$\rho=2\cos\theta\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\right)$，$M_2$的极坐标方程为$\rho=2\sin\theta\left(\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{3\pi}{4}\right)$，

M_3的极坐标方程为$\rho=-2\cos\theta\left(\dfrac{3\pi}{4}\le\theta\le\pi\right)$.

（2）设$P(\rho,\theta)$，由题设及（1）知

若$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$，则$2\cos\theta=\sqrt{3}$，解得$\theta=\frac{\pi}{6}$；

若$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$，则$2\sin\theta=\sqrt{3}$，解得$\theta=\frac{\pi}{3}$或$\theta=\frac{2\pi}{3}$；

若$\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\pi$，则$-2\cos\theta=\sqrt{3}$，解得$\theta=\frac{5\pi}{6}$.

综上，P的极坐标为$\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{6}\right)$或$\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$或$\left(\sqrt{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$或$\left(\sqrt{3},\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

23．解：（1）由于$[(x-1)+(y+1)+(z+1)]^2$

$=(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2+2[(x-1)(y+1)+(y+1)(z+1)+(z+1)(x-1)]$

$\leq 3\left[(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\right]$，

故由已知得$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\geq\dfrac{4}{3}$，

当且仅当$x=\dfrac{5}{3}$，$y=-\dfrac{1}{3}$，$z=-\dfrac{1}{3}$时等号成立.

所以$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$的最小值为$\dfrac{4}{3}$.

（2）由于

$[(x-2)+(y-1)+(z-a)]^2$

$=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2+2[(x-2)(y-1)+(y-1)(z-a)+(z-a)(x-2)]$

$\leq 3\left[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\right]$，

故由已知$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\geq\dfrac{(2+a)^2}{3}$，

当且仅当$x=\dfrac{4-a}{3}$，$y=\dfrac{1-a}{3}$，$z=\dfrac{2a-2}{3}$时等号成立.

因此$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2$的最小值为$\dfrac{(2+a)^2}{3}$.

由题设知$\dfrac{(2+a)^2}{3}\geq\dfrac{1}{3}$，解得$a\leq-3$或$a\geq-1$.