绝密★启用前

2018年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学试题参考答案（全国卷Ⅱ）

一、选择题

1．D	2．A	3．B	4．B	5．A	6．A
7．B	8．C	9．C	10．A	11．C	12．D

二、填空题

13．$y=2x$　　14．9　　15．$-\dfrac{1}{2}$　　16．$40\sqrt{2}\pi$

三、解答题

17．**解**：

（1）设$\{a_n\}$的公差为d，由题意得$3a_1+3d=-15$．

由$a_1=-7$得d=2．

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-9$．

（2）由（1）得$S_n=n^2-8n=(n-4)^2-16$．

所以当n=4时，S_n取得最小值，最小值为−16．

18．**解**：

（1）利用模型①，该地区2018年的环境基础设施投资额的预测值为

$$\hat{y}=-30.4+13.5\times 19=226.1\text{(亿元)}.$$

利用模型②，该地区2018年的环境基础设施投资额的预测值为

$$\hat{y}=99+17.5\times 9=256.5\text{(亿元)}.$$

（2）利用模型②得到的预测值更可靠．

理由如下：

（ⅰ）从折线图可以看出，2000年至2016年的数据对应的点没有随机散布在直线$y=-30.4+13.5t$上下．这说明利用2000年至2016年的数据建立的线性模型①不能很好地描述环境基础设施投资额的变化趋势．2010年相对2009年的环境基础设施投资额有明显增加，2010年至2016年的数据对应的点位于一条直线的附近，这说明从2010年开始环境基础设施投资额的变化规律呈线性增长趋势，利用2010年至2016年的数

据建立的线性模型 $\hat{y}=99+17.5t$ 可以较好地描述 2010 年以后的环境基础设施投资额的变化趋势，因此利用模型②得到的预测值更可靠．

（ii）从计算结果看，相对于 2016 年的环境基础设施投资额 220 亿元，由模型①得到的预测值 226.1 亿元的增幅明显偏低，而利用模型②得到的预测值的增幅比较合理．说明利用模型②得到的预测值更可靠．

以上给出了 2 种理由，考生答出其中任意一种或其他合理理由均可得分．

19．解：

（1）由题意得 $F(1,0)$，l 的方程为 $y=k(x-1)(k>0)$．

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ y^2=4x\end{cases}$ 得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$．

$\Delta=16k^2+16>0$，故 $x_1+x_2=\dfrac{2k^2+4}{k^2}$．

所以 $|AB|=|AF|+|BF|=(x_1+1)+(x_2+1)=\dfrac{4k^2+4}{k^2}$．

由题设知 $\dfrac{4k^2+4}{k^2}=8$，解得 $k=-1$（舍去），$k=1$．

因此 l 的方程为 $y=x-1$．

（2）由（1）得 AB 的中点坐标为 $(3,2)$，所以 AB 的垂直平分线方程为 $y-2=-(x-3)$，即 $y=-x+5$．

设所求圆的圆心坐标为 (x_0,y_0)，则

$$\begin{cases}y_0=-x_0+5,\\ (x_0+1)^2=\dfrac{(y_0-x_0+1)^2}{2}+16.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x_0=3,\\ y_0=2\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_0=11,\\ y_0=-6.\end{cases}$$

因此所求圆的方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=16$ 或 $(x-11)^2+(y+6)^2=144$．

20．解：

（1）因为 $AP=CP=AC=4$，O 为 AC 的中点，所以 $OP\perp AC$，且 $OP=2\sqrt{3}$．

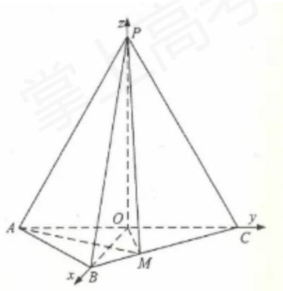
连结 OB．因为 $AB=BC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

且 $OB \perp AC$， $OB=\frac{1}{2}AC=2$.

由 $OP^2+OB^2=PB^2$ 知 $PO \perp OB$.

由 $OP \perp OB, OP \perp AC$ 知 $PO \perp$ 平面 ABC .

（2）如图，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$ 的方向为 x 轴正方向，建立空间直角坐标系 $O-xyz$.



由已知得 $O(0,0,0), B(2,0,0), A(0,-2,0), C(0,2,0), P(0,0,2\sqrt{3}), \overrightarrow{AP}=(0,2,2\sqrt{3})$, 取平面 PAC 的法向量 $\overrightarrow{OB}=(2,0,0)$.

设 $M(a,2-a,0)(0<a\le 2)$，则 $\overrightarrow{AM}=(a,4-a,0)$.

设平面 PAM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

由 $\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=0, \overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 得 $\begin{cases}2y+2\sqrt{3}z=0\\ ax+(4-a)y=0\end{cases}$，可取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}(a-4),\sqrt{3}a,-a)$，

所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{OB},\boldsymbol{n}\right\rangle=\dfrac{2\sqrt{3}(a-4)}{2\sqrt{3(a-4)^2+3a^2+a^2}}$.

由已知可得 $|\cos\left\langle\overrightarrow{OB},\boldsymbol{n}\right\rangle|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $\dfrac{2\sqrt{3}|a-4|}{2\sqrt{3(a-4)^2+3a^2+a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 解得 $a=-4$（舍去），$a=\dfrac{4}{3}$.

所以 $\boldsymbol{n}=(-\dfrac{8\sqrt{3}}{3},\dfrac{4\sqrt{3}}{3},-\dfrac{4}{3})$.

又 $\overrightarrow{PC}=(0,2,-2\sqrt{3})$，所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}\right\rangle=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

所以 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

21．**解**：

（1）当 $a=1$ 时，$f(x)\geq 1$ 等价于 $(x^2+1)e^{-x}-1\leq 0$.

设函数 $g(x)=(x^2+1)e^{-x}-1$，则 $g'(x)=-(x^2-2x+1)e^{-x}=-(x-1)^2e^{-x}$.

当 $x\neq 1$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减.

而 $g(0)=0$，故当 $x\geq 0$ 时，$g(x)\leq 0$，即 $f(x)\geq 1$.

（2）设函数 $h(x)=1-ax^2e^{-x}$.

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点当且仅当 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点.

（i）当 $a\leq 0$ 时，$h(x)>0$，$h(x)$ 没有零点；

（ii）当 $a>0$ 时，$h'(x)=ax(x-2)e^{-x}$.

当 $x\in(0,2)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递减，在 $(2,+\infty)$ 单调递增.

故 $h(2)=1-\frac{4a}{e^2}$ 是 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的最小值.

①若 $h(2)>0$，即 $a<\frac{e^2}{4}$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 没有零点；

②若 $h(2)=0$，即 $a=\frac{e^2}{4}$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点；

③若 $h(2)<0$，即 $a>\frac{e^2}{4}$，由于 $h(0)=1$，所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 有一个零点，

由（1）知，当 $x>0$ 时，$e^x>x^2$，所以

$$h(4a)=1-\frac{16a^3}{e^{4a}}=1-\frac{16a^3}{(e^{2a})^2}>1-\frac{16a^3}{(2a)^4}=1-\frac{1}{a}>0.$$

故 $h(x)$ 在 $(2,4a)$ 有一个零点，因此 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有两个零点.

综上，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点时，$a=\frac{e^2}{4}$.

22．**解**：

（1）曲线C的直角坐标方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

当$\cos\alpha\neq 0$时，l的直角坐标方程为$y=\tan\alpha\cdot x+2-\tan\alpha$，

当$\cos\alpha=0$时，l的直角坐标方程为$x=1$.

（2）将l的参数方程代入C的直角坐标方程，整理得关于t的方程

$$(1+3\cos^2\alpha)t^2+4(2\cos\alpha+\sin\alpha)t-8=0.\ ①$$

因为曲线C截直线l所得线段的中点$(1,2)$在C内，所以①有两个解，设为t_1，t_2，则

$t_1+t_2=0$.

又由①得$t_1+t_2=-\dfrac{4(2\cos\alpha+\sin\alpha)}{1+3\cos^2\alpha}$，故$2\cos\alpha+\sin\alpha=0$，于是直线$l$的斜率

$k=\tan\alpha=-2$.

23．**解：**

（1）当$a=1$时，$f(x)=\begin{cases}2x+4,x\leq -1,\\ 2,-1<x\leq 2,\\ -2x+6,x>2.\end{cases}$

可得$f(x)\geq 0$的解集为$\{x\,|-2\leq x\leq 3\}$.

（2）$f(x)\leq 1$等价于$|x+a|+|x-2|\geq 4$.

而$|x+a|+|x-2|\geq|a+2|$，且当$x=2$时等号成立．故$f(x)\leq 1$等价于$|a+2|\geq 4$.

由$|a+2|\geq 4$可得$a\leq -6$或$a\geq 2$，所以a的取值范围是$(-\infty,-6]\cup[2,+\infty)$