2019年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学·参考答案

1．A　2．C　3．C　4．D　5．A

6．C　7．B　8．D　9．A　10．B

11．A　12．B

13．0.98　　14．-3

15．$6\sqrt{3}$　　16．26；$\sqrt{2}-1$

17．解：（1）由已知得，$B_1C_1\perp$平面ABB_1A_1，$BE\subset$平面ABB_1A_1，

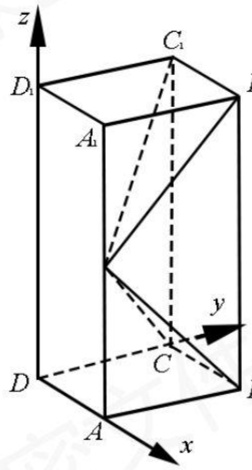
故$B_1C_1\perp BE$．

又$BE\perp EC_1$，所以$BE\perp$平面EB_1C_1．

（2）由（1）知$\angle BEB_1=90°$．由题设知$\text{Rt}\triangle ABE\cong\text{Rt}\triangle A_1B_1E$，所以$\angle AEB=45°$，

故$AE=AB$，$AA_1=2AB$．

以D为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$的方向为x轴正方向，$|\overrightarrow{DA}|$为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系D–xyz，



则C（0，1，0），B（1，1，0），C_1（0，1，2），E（1，0，1），$\overrightarrow{CB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{CE}=(1,-1,1)$，

$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$．

设平面EBC的法向量为$\boldsymbol{n}$=（x，y，x），则

$$\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x=0,\\ x-y+z=0,\end{cases}$$

所以可取$\boldsymbol{n}=(0,-1,-1)$.

设平面ECC_1的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}2z=0,\\ x-y+z=0.\end{cases}$$

所以可取$\boldsymbol{m}=(1,1,0)$.

于是$\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=-\dfrac{1}{2}$.

所以，二面角$B-EC-C_1$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

18．解：（1）X=2就是10∶10平后，两人又打了2个球该局比赛结束，则这2个球均由甲得分，或者均由乙得分．因此$P(X=2)=0.5\times0.4+(1-0.5)\times(1-0.4)=0.5$.

（2）X=4且甲获胜，就是10∶10平后，两人又打了4个球该局比赛结束，且这4个球的得分情况为：前两球是甲、乙各得1分，后两球均为甲得分．

因此所求概率为$[0.5\times(1-0.4)+(1-0.5)\times0.4]\times0.5\times0.4=0.1$.

19．解：（1）由题设得$4(a_{n+1}+b_{n+1})=2(a_n+b_n)$，即$a_{n+1}+b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$.

又因为$a_1+b_1=1$，所以$\{a_n+b_n\}$是首项为1，公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列．

由题设得$4(a_{n+1}-b_{n+1})=4(a_n-b_n)+8$，即$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n+2$.

又因为$a_1-b_1=1$，所以$\{a_n-b_n\}$是首项为1，公差为2的等差数列．

（2）由（1）知，$a_n+b_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$，$a_n-b_n=2n-1$.

所以$a_n=\dfrac{1}{2}[(a_n+b_n)+(a_n-b_n)]=\dfrac{1}{2^n}+n-\dfrac{1}{2}$,

$b_n=\dfrac{1}{2}[(a_n+b_n)-(a_n-b_n)]=\dfrac{1}{2^n}-n+\dfrac{1}{2}$.

20．解：（1）$f(x)$的定义域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$.

因为$f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{(x-1)^2}>0$，所以$f(x)$在（0，1），（1，+∞）单调递增.

因为f（e）$=1-\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}<0$，$f(\mathrm{e}^2)=2-\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}^2-1}=\dfrac{\mathrm{e}^2-3}{\mathrm{e}^2-1}>0$，所以$f$（$x$）在（1，+∞）有唯一零点$x_1$，

即f（x_1）=0. 又$0<\dfrac{1}{x_1}<1$，$f(\dfrac{1}{x_1})=-\ln x_1+\dfrac{x_1+1}{x_1-1}=-f(x_1)=0$，故$f$（$x$）在（0，1）有唯一零点$\dfrac{1}{x_1}$.

综上，f（x）有且仅有两个零点.

（2）因为$\dfrac{1}{x_0}=\mathrm{e}^{-\ln x_0}$，故点$B$（$-\ln x_0$，$\dfrac{1}{x_0}$）在曲线$y=\mathrm{e}^x$上.

由题设知$f(x_0)=0$，即$\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$，故直线$AB$的斜率$k=\dfrac{\dfrac{1}{x_0}-\ln x_0}{-\ln x_0-x_0}=\dfrac{\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{x_0+1}{x_0-1}}{-\dfrac{x_0+1}{x_0-1}-x_0}=\dfrac{1}{x_0}$.

曲线$y=\mathrm{e}^x$在点$B(-\ln x_0,\dfrac{1}{x_0})$处切线的斜率是$\dfrac{1}{x_0}$，曲线$y=\ln x$在点$A(x_0,\ln x_0)$处切线的斜率也是$\dfrac{1}{x_0}$，

所以曲线$y=\ln x$在点$A(x_0,\ln x_0)$处的切线也是曲线$y=\mathrm{e}^x$的切线.

21．解：（1）由题设得$\dfrac{y}{x+2}\cdot\dfrac{y}{x-2}=-\dfrac{1}{2}$，化简得$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1(|x|\neq 2)$，所以$C$为中心在坐标原点，焦点在$x$轴上的椭圆，不含左右顶点.

（2）（i）设直线PQ的斜率为k，则其方程为$y=kx(k>0)$.

由$\begin{cases} y=kx \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$得$x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$.

记$u=\dfrac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$，则$P(u,uk),Q(-u,-uk),E(u,0)$.

于是直线QG的斜率为$\dfrac{k}{2}$，方程为$y=\dfrac{k}{2}(x-u)$.

由$\begin{cases} y=\dfrac{k}{2}(x-u), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$得

$$(2+k^2)x^2-2uk^2x+k^2u^2-8=0\ .\ ①$$

设 $G(x_G, y_G)$，则 $-u$ 和 x_G 是方程①的解，故 $x_G=\dfrac{u(3k^2+2)}{2+k^2}$，由此得 $y_G=\dfrac{uk^3}{2+k^2}$.

从而直线 PG 的斜率为 $\dfrac{\dfrac{uk^3}{2+k^2}-uk}{\dfrac{u(3k^2+2)}{2+k^2}-u}=-\dfrac{1}{k}$.

所以 $PQ\perp PG$，即 $\triangle PQG$ 是直角三角形.

（ii）由（i）得 $|PQ|=2u\sqrt{1+k^2}$，$|PG|=\dfrac{2uk\sqrt{k^2+1}}{2+k^2}$，所以 $\triangle PQG$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}|PQ||PG|=\frac{8k(1+k^2)}{(1+2k^2)(2+k^2)}=\frac{8(\frac{1}{k}+k)}{1+2(\frac{1}{k}+k)^2}.$$

设 $t=k+\dfrac{1}{k}$，则由 $k>0$ 得 $t\geq2$，当且仅当 $k=1$ 时取等号.

因为 $S=\dfrac{8t}{1+2t^2}$ 在[2，+∞）单调递减，所以当 $t=2$，即 $k=1$ 时，S 取得最大值，最大值为 $\dfrac{16}{9}$.

因此，$\triangle PQG$ 面积的最大值为 $\dfrac{16}{9}$.

22．解：（1）因为 $M(\rho_0,\theta_0)$ 在 C 上，当 $\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$\rho_0=4\sin\dfrac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$.

由已知得 $|OP|=|OA|\cos\dfrac{\pi}{3}=2$.

设 $Q(\rho,\theta)$ 为 l 上除 P 的任意一点．在 $\mathrm{Rt}\triangle OPQ$ 中，$\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=|OP|=2$，

经检验，点 $P(2,\dfrac{\pi}{3})$ 在曲线 $\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=2$ 上.

所以，l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=2$.

（2）设 $P(\rho,\theta)$，在 $\mathrm{Rt}\triangle OAP$ 中，$|OP|=|OA|\cos\theta=4\cos\theta$，即 $\rho=4\cos\theta$.

因为 P 在线段 OM 上，且 $AP\perp OM$，故 θ 的取值范围是 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

所以，P点轨迹的极坐标方程为$\rho=4\cos\theta,\quad \theta\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

23．解：（1）当 a=1 时， $f(x)=|x-1|\,x+|x-2|(x-1)$.

当$x<1$时， $f(x)=-2(x-1)^2<0$；当$x\geq 1$时， $f(x)\geq 0$.

所以，不等式$f(x)<0$的解集为$(-\infty,1)$.

（2）因为$f(a)=0$，所以$a\geq 1$.

当$a\geq 1$， $x\in(-\infty,1)$时， $f(x)=(a-x)\,x+(2-x)(x-a)=2(a-x)(x-1)<0$.

所以， a的取值范围是$[1,+\infty)$.