2018 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学（全国卷 I ）参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	A	B	D	A	B	D	C	A	B	A

13.6　14.-63　15.16　16.$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

17.（12 分）

解：（1）在$\triangle ABD$中，由正弦定理得$\dfrac{BD}{\sin\angle A}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$.

由题设知，$\dfrac{5}{\sin 45^\circ}=\dfrac{2}{\sin\angle ADB}$，所以$\sin\angle ADB=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

由题设知，$\angle ADB<90^\circ$，所以$\cos\angle ADB=\sqrt{1-\dfrac{2}{25}}=\dfrac{\sqrt{23}}{5}$.

（2）由题设及（1）知，$\cos\angle BDC=\sin\angle ADB=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

在$\triangle BCD$中，由余弦定理得

$BC^2=BD^2+DC^2-2\cdot BD\cdot DC\cdot\cos\angle BDC$

$=25+8-2\times5\times2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

$=25$.

所以$BC=5$.

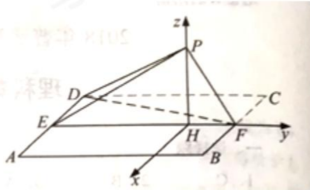
18.（12 分）

解：（1）由已知可得，$BF\perp PF$，$BF\perp EF$，所以$BF\perp$平面PEF.

又$BF\subset$平面$ABFD$，所以平面$PEF\perp$平面$ABFD$.

（2）作$PH\perp EF$，垂足为H.由（1）得，$PH\perp$平面$ABFD$.

以H为坐标原点，$\overrightarrow{HF}$的方向为y轴正方向，$|\overrightarrow{BF}|$为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系$H-xyz$.



由（1）可得，$DE\perp PE$.又 $DP=2$，$DE=1$，所以 $PE=\sqrt{3}$.又 $PF=1$，$EF=2$，故 $PE\perp PF$.

可得 $PH=\dfrac{\sqrt{3}}{2},EH=\dfrac{3}{2}$.

则 $H(0,0,0),P(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}),D(-1,-\dfrac{3}{2},0),\overrightarrow{DP}=(1,\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}),\ \overrightarrow{HP}=(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ 为平面

$ABFD$ 的法向量.

设 DP 与平面 $ABFD$ 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\dfrac{\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{HP}||\overrightarrow{DP}|}|=\dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

所以 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

19.（12 分）

解：（1）由已知得 $F(1,0)$，l 的方程为 $x=1$.

由已知可得，点 A 的坐标为 $(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $(1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

所以 AM 的方程为 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$ 或 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}$.

（2）当 l 与 x 轴重合时，$\angle OMA=\angle OMB=0°$.

当 l 与 x 轴垂直时，OM 为 AB 的垂直平分线，所以 $\angle OMA=\angle OMB$.

当 l 与 x 轴不重合也不垂直时，设 l 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq 0)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则 $x_1<\sqrt{2},x_2<\sqrt{2}$，直线 MA，MB 的斜率之和为 $k_{MA}+k_{MB}=\dfrac{y_1}{x_1-2}+\dfrac{y_2}{x_2-2}$.

由 $y_1=kx_1-k,y_2=kx_2-k$ 得

$$k_{MA}+k_{MB}=\frac{2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k}{(x_1-2)(x_2-2)}.$$

将 $y=k(x-1)$ 代入 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 得

$$(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0.$$

所以，$x_1+x_2=\frac{4k^2}{2k^2+1},x_1x_2=\frac{2k^2-2}{2k^2+1}$.

则 $2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k=\frac{4k^3-4k-12k^3+8k^3+4k}{2k^2+1}=0$.

从而 $k_{MA}+k_{MB}=0$，故 MA，MB 的倾斜角互补，所以 $\angle OMA=\angle OMB$.

综上，$\angle OMA=\angle OMB$.

20.（12 分）

解:（1）20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $f(p)=\mathrm{C}_{20}^{2}p^2(1-p)^{18}$.因此

$f'(p)=\mathrm{C}_{20}^{2}[2p(1-p)^{18}-18p^2(1-p)^{17}]=2\mathrm{C}_{20}^{2}p(1-p)^{17}(1-10p)$.

令 $f'(p)=0$，得 $p=0.1$.当 $p\in(0,0.1)$时，$f'(p)>0$；当 $p\in(0.1,1)$时，$f'(p)<0$.

所以 $f(p)$ 的最大值点为 $p_0=0.1$.

（2）由（1）知，$p=0.1$.

（i）令 Y 表示余下的 180 件产品中的不合格品件数，依题意知 Y：$B(180,0.1)$，

$X=20\times2+25Y$，即 $X=40+25Y$.

所以 $EX=E(40+25Y)=40+25EY=490$.

（ii）如果对余下的产品作检验，则这一箱产品所需要的检验费为 400 元.

由于 $EX>400$，故应该对余下的产品作检验.

21.（12 分）

解:（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$.

（i）若 $a\le2$，则 $f'(x)\le0$，当且仅当 $a=2$，$x=1$ 时 $f'(x)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$

单调递减.

（ii）若$a>2$，令$f'(x)=0$得，$x=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$或$x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

当$x\in(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})\cup(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 时，$f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}),(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$单调递减，在$(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$单调递增.

（2）由（1）知，$f(x)$存在两个极值点当且仅当$a>2$.

由于$f(x)$的两个极值点x_1,x_2满足$x^2-ax+1=0$，所以$x_1x_2=1$，不妨设$x_1<x_2$，则$x_2>1$.由于

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\frac{1}{x_1x_2}-1+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2}-x_2},$$

所以$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$等价于$\dfrac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$.

设函数$g(x)=\dfrac{1}{x}-x+2\ln x$，由（1）知，$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，又$g(1)=0$，从而当$x\in(1,+\infty)$时，$g(x)<0$.

所以$\dfrac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$，即$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

22. [选修4—4：坐标系与参数方程]（10分）

解:（1）由$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$得C_2的直角坐标方程为$(x+1)^2+y^2=4$.

（2）由（1）知C_2是圆心为$A(-1,0)$，半径为2的圆由题设知，C_1是过点$B(0,2)$且关于y轴对称的两条射线．记y轴右边的射线为l_1，y轴左边的射线为l_2．由于B在

圆C_2的外面，故C_1与C_2有且仅有三个公共点等价于l_1与C_2只有一个公共点且l_2与C_2有两个公共点，或l_2与C_2只有一个公共点且l_1与C_2有两个公共点.

当l_1与C_2只有一个公共点时，A到l_1所在直线的距离为2，所以$\frac{|-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，故$k=-\frac{4}{3}$或$k=0$.

经检验，当$k=0$时，l_1与C_2没有公共点；当$k=-\frac{4}{3}$时，l_1与C_2只有一个公共点，l_2与C_2有两个公共点.

当l_2与C_2只有一个公共点时，A到l_2所在直线的距离为2，所以$\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，故$k=0$或$k=\frac{4}{3}$.

经检验，当$k=0$时，l_1与C_2没有公共点；当$k=\frac{4}{3}$时，l_2与C_2没有公共点.

综上，所求C_1的方程为$y=-\frac{4}{3}|x|+2$.

23. [选修4—5：不等式选讲]（10分）

解：（1）当$a=1$时，$f(x)=|x+1|-|x-1|$，即$f(x)=\begin{cases}-2, x\le -1,\\ 2x, -1<x<1,\\ 2, x\ge 1.\end{cases}$

故不等式$f(x)>1$的解集为$\{x\,|\,x>\frac{1}{2}\}$.

（2）当$x\in(0,1)$时$|x+1|-|ax-1|>x$成立等价于当$x\in(0,1)$时$|ax-1|<1$成立.

若$a\le 0$，则当$x\in(0,1)$时$|ax-1|\ge 1$；

若$a>0$，$|ax-1|<1$的解集为$0<x<\frac{2}{a}$，所以$\frac{2}{a}\ge 1$，故$0<a\le 2$.

综上，a的取值范围为$(0,2]$.