

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

本试卷共5页，23题（含选考题）。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用2B铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | -4 < x < 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $\{x | -4 < x < 3\}$ B. $\{x | -4 < x < -2\}$
C. $\{x | -2 < x < 2\}$ D. $\{x | 2 < x < 3\}$

2. 设复数 z 满足 $|z-i|=1$, z 在复平面内对应的点为 (x,y) , 则

- A. $(x+1)^2 + y^2 = 1$ B. $(x-1)^2 + y^2 = 1$
C. $x^2 + (y-1)^2 = 1$ D. $x^2 + (y+1)^2 = 1$

3. 已知 $a = \log_2 0.2$, $b = 2^{0.2}$, $c = 0.2^{0.3}$, 则

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

4. 古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足

底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, 称为黄金分割比例), 著

名的“断臂维纳斯”便是如此。此外，最美人体的头顶至咽喉的长

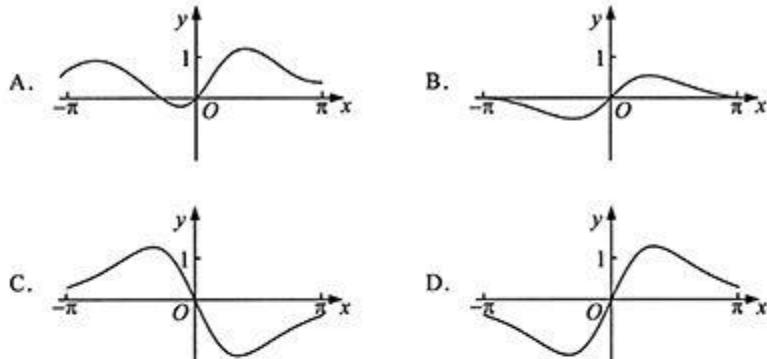
度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。若某人满足上述两个黄

金分割比例，且腿长为105cm，头顶至脖子下端的长度为26cm，则其身高可能是

- A. 165cm B. 175cm C. 185cm D. 190cm



5. 函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致为



6. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化。每一“重卦”由从下到上排列的6个爻组成，爻分为阳爻“—”和阴爻“- -”，右图就是一重卦。在所有重卦中随机取一重卦，则该重卦恰有3个阳爻的概率是

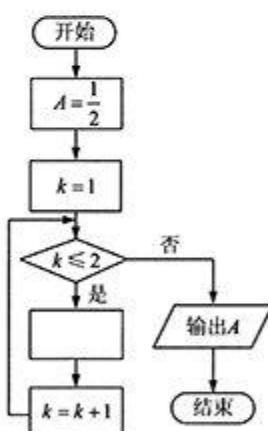
- A. $\frac{5}{16}$ B. $\frac{11}{32}$ C. $\frac{21}{32}$ D. $\frac{11}{16}$

7. 已知非零向量 a, b 满足 $|a|=2|b|$ ，且 $(a-b) \perp b$ ，则 a 与 b 的夹角为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

8. 右图是求 $\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$ 的程序框图，图中空白框中应填入

- A. $A = \frac{1}{2+A}$
B. $A = 2 + \frac{1}{A}$
C. $A = \frac{1}{1+2A}$
D. $A = 1 + \frac{1}{2A}$



9. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。已知 $S_4 = 0$ ， $a_5 = 5$ ，则

- A. $a_n = 2n - 5$ B. $a_n = 3n - 10$ C. $S_n = 2n^2 - 8n$ D. $S_n = \frac{1}{2}n^2 - 2n$

10. 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, 过 F_2 的直线与 C 交于 A , B 两点. 若 $|AF_2|=2|F_2B|$, $|AB|=|BF_1|$, 则 C 的方程为

A. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ B. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ D. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

11. 关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论:

- ① $f(x)$ 是偶函数 ② $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递增
③ $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 有 4 个零点 ④ $f(x)$ 的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是

- A. ①②④ B. ②④ C. ①④ D. ①③

12. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上, $PA=PB=PC$, $\triangle ABC$ 是边长

为 2 的正三角形, E , F 分别是 PA , AB 的中点, $\angle CEF=90^\circ$, 则球 O 的体积为

- A. $8\sqrt{6}\pi$ B. $4\sqrt{6}\pi$ C. $2\sqrt{6}\pi$ D. $\sqrt{6}\pi$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 _____.

14. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1=\frac{1}{3}$, $a_4^2=a_6$, 则 $S_5=$ _____.

15. 甲、乙两队进行篮球决赛, 采取七场四胜制 (当一队赢得四场胜利时, 该队获胜, 决赛结束). 根据前期比赛成绩, 甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”. 设甲队主场取胜的概率为 0.6, 客场取胜的概率为 0.5, 且各场比赛结果相互独立, 则甲队以 4:1 获胜的概率是 _____.

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$) 的左、右焦点分别为 F_1 , F_2 , 过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A , B 两点. 若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$, 则 C 的离心率为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c . 设 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$.

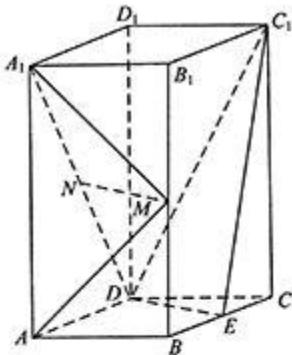
- (1) 求 A ;

- (2) 若 $\sqrt{2}a+b=2c$, 求 $\sin C$.

18. (12分)

如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形， $AA_1=4$ ， $AB=2$ ， $\angle BAD=60^\circ$ ， E ， M ， N 分别是 BC ， BB_1 ， A_1D 的中点。

- (1) 证明： $MN \parallel$ 平面 C_1DE ；
- (2) 求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值。



19. (12分)

已知抛物线 $C: y^2 = 3x$ 的焦点为 F ，斜率为 $\frac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A ， B ，与 x 轴的交点为 P 。

- (1) 若 $|AF|+|BF|=4$ ，求 l 的方程；
- (2) 若 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$ ，求 $|AB|$ 。

20. (12分)

已知函数 $f(x)=\sin x - \ln(1+x)$ ， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数。证明：

- (1) $f'(x)$ 在区间 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点；
- (2) $f(x)$ 有且仅有2个零点。

21. (12分)

为治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，想知道哪种新药更有效，为此进行动物试验。试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验。对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药。一轮的治疗结果得出后，再安排下一轮试验。当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多4只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效。为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得1分，乙药得-1分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得1分，甲药得-1分；若都治愈或都未治愈则两种药均得0分。甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β ，一轮试验中甲药的得分记为 X 。

- (1) 求 X 的分布列；
- (2) 若甲药、乙药在试验开始时都赋予4分， p_i ($i=0, 1, \dots, 8$) 表示“甲药的累计得分为 i 时，最终认为甲药比乙药更有效”的概率，则 $p_0=0$ ， $p_8=1$ ， $p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots, 7$)，其中 $a=P(X=-1)$ ， $b=P(X=0)$ ， $c=P(X=1)$ 。假设 $\alpha=0.5$ ， $\beta=0.8$ 。
 - (i) 证明： $\{p_{i+1}-p_i\}$ ($i=0, 1, 2, \dots, 7$) 为等比数列；
 - (ii) 求 p_4 ，并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性。

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{4t}{1+t^2} \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点 O 为极点,

x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta + \sqrt{3}\rho\sin\theta + 11 = 0$.

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;

(2) 求 C 上的点到 l 距离的最小值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知 a, b, c 为正数, 且满足 $abc = 1$. 证明:

$$(1) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2;$$

$$(2) (a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24.$$