

绝密★启用前

2019 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

本试卷共 5 页, 23 题(含选考题), 全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

★祝考试顺利★

1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答: 用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 选考题的作答: 先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内, 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

5. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | -4 < x < 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $\{x | -4 < x < 3\}$ B. $\{x | -4 < x < -2\}$
C. $\{x | -2 < x < 2\}$ D. $\{x | 2 < x < 3\}$

2. 设复数 z 满足 $|z - i| = 1$, z 在复平面内对应的点为 (x, y) , 则

- A. $(x+1)^2 + y^2 = 1$ B. $(x-1)^2 + y^2 = 1$
C. $x^2 + (y-1)^2 = 1$ D. $x^2 + (y+1)^2 = 1$

3. 已知 $a = \log_2 0.2$, $b = 2^{0.2}$, $c = 0.2^{0.3}$, 则

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

4. 古希腊时期, 人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足

底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, 称为黄金分割比例), 著名

的“断臂维纳斯”便是如此。此外, 最美人体的头顶至咽喉的长

度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。若某人满足上述两个黄

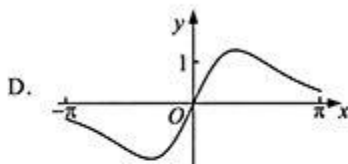
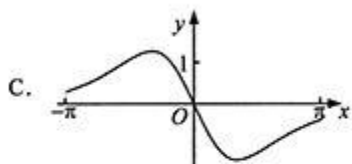
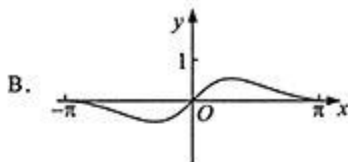
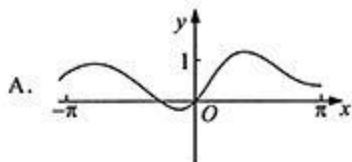
金分割比例, 且腿长为 105 cm, 头顶至脖子下端的长度为 26 cm,

则其身高可能是

- A. 165 cm B. 175 cm C. 185 cm D. 190 cm



5. 函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致为



6. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化. 每一“重卦”由从下到上排列的6个爻组成, 爻分为阳爻“—”和阴爻“--”, 右图就是一重卦. 在所有重卦中随机取一重卦, 则该重卦恰有3个阳爻的概率是



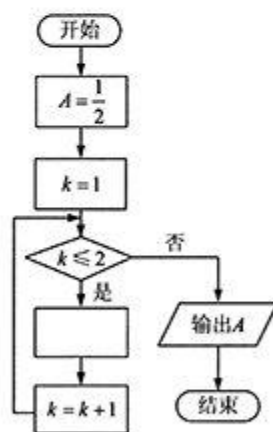
- A. $\frac{5}{16}$ B. $\frac{11}{32}$ C. $\frac{21}{32}$ D. $\frac{11}{16}$

7. 已知非零向量 a, b 满足 $|a| = 2|b|$, 且 $(a-b) \perp b$, 则 a 与 b 的夹角为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

8. 右图是求 $\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$ 的程序框图, 图中空白框中应填入

- A. $A = \frac{1}{2+A}$
 B. $A = 2 + \frac{1}{A}$
 C. $A = \frac{1}{1+2A}$
 D. $A = 1 + \frac{1}{2A}$



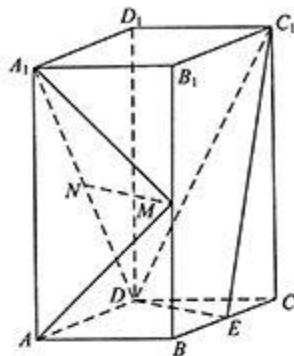
9. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_4 = 0$, $a_5 = 5$, 则

- A. $a_n = 2n - 5$ B. $a_n = 3n - 10$ C. $S_n = 2n^2 - 8n$ D. $S_n = \frac{1}{2}n^2 - 2n$

18. (12分)

如图, 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, $AA_1=4$, $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$, E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点.

- (1) 证明: $MN \parallel$ 平面 C_1DE ;
- (2) 求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值.



19. (12分)

已知抛物线 $C: y^2=3x$ 的焦点为 F , 斜率为 $\frac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A, B , 与 x 轴的交点为 P .

- (1) 若 $|AF|+|BF|=4$, 求 l 的方程;
- (2) 若 $\overline{AP}=3\overline{PB}$, 求 $|AB|$.

20. (12分)

已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数. 证明:

- (1) $f'(x)$ 在区间 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点;
- (2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

21. (12分)

为治疗某种疾病, 研制了甲、乙两种新药, 希望知道哪种新药更有效, 为此进行动物试验. 试验方案如下: 每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验. 对于两只白鼠, 随机选一只施以甲药, 另一只施以乙药. 一轮的治疗结果得出后, 再安排下一轮试验. 当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时, 就停止试验, 并认为治愈只数多的药更有效. 为了方便描述问题, 约定: 对于每轮试验, 若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分, 乙药得 -1 分; 若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分, 甲药得 -1 分; 若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分. 甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β , 一轮试验中甲药的得分记为 X .

(1) 求 X 的分布列;

(2) 若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分, $p_i (i=0,1,\dots,8)$ 表示“甲药的累计得分为 i 时, 最终认为甲药比乙药更有效”的概率, 则 $p_0=0, p_8=1, p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1} (i=1,2,\dots,7)$, 其中 $a=P(X=-1), b=P(X=0), c=P(X=1)$. 假设 $\alpha=0.5, \beta=0.8$.

(i) 证明: $\{p_{i+1}-p_i\} (i=0,1,2,\dots,7)$ 为等比数列;

(ii) 求 p_4 , 并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{4t}{1+t^2} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$
 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta + \sqrt{3}\rho\sin\theta + 11 = 0$.

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;

(2) 求 C 上的点到 l 距离的最小值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知 a, b, c 为正数, 且满足 $abc = 1$. 证明:

(1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$;

(2) $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24$.