绝密★本科目考试启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

数　学（文）（北京卷）

本试卷共5页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.已知集合$A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x|x>1\}$，则$A\cup B=$

A. （–1，1）　　B. （1，2）　　C. （–1，+∞）　　D. （1，+∞）

【答案】C

【解析】

【分析】

根据并集的求法直接求出结果.

【详解】$\because A=\{x|-1<x<2\},B=\{x|>1\}$ ，

$\therefore A\cup B=(1,+\infty)$ ，

故选C.

【点睛】考查并集的求法，属于基础题.

2.已知复数z=2+i，则$z\cdot\overline{z}=$

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. 3　　D. 5

【答案】D

【解析】

【分析】

题先求得$\overline{z}$，然后根据复数的乘法运算法则即得.

【详解】$\because \mathrm{z}=2+\mathrm{i},\mathrm{z}\cdot\overline{\mathrm{z}}=(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=5$ 故选D.

【点睛】本容易题，注重了基础知识、基本计算能力的考查.

3.下列函数中，在区间（0，+∞ ）上单调递增的是

A. $y=x^{\frac{1}{2}}$　　B. $y=2^{-x}$　　C. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$　　D. $y=\frac{1}{x}$

【答案】A

【解析】

【分析】

根据函数图像性质可得出结果.

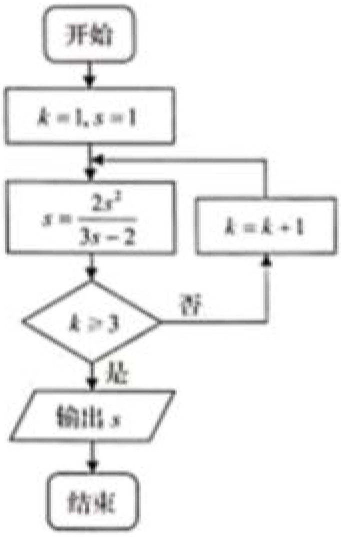
【详解】函数$y=2^{-x},y=\log_{\frac{1}{2}}x$，

$y=\frac{1}{x}$ 在区间$(0,+\infty)$ 上单调递减，

函数$y=x^{\frac{1}{2}}$ 在区间$(0,+\infty)$上单调递增，故选 A.

【点睛】本题考查简单的指数函数、对数函数、幂函数的单调性，注重对重要知识、基础知识的考查，蕴含数形结合思想，属于容易题.

4.执行如图所示的程序框图，输出的 s 值为



A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】

根据程序框图中的条件逐次运算即可.

【详解】运行第一次， $k=1$ ， $s=\dfrac{2\times1^2}{3\times1-2}=2$ ，

运行第二次，$k=2$ ，$s=\dfrac{2\times2^2}{3\times2-2}=2$ ，

运行第三次，$k=3$ ，$s=\dfrac{2\times2^2}{3\times2-2}=2$ ，

结束循环，输出 $s=2$ ，故选 B.

【点睛】本题考查程序框图，属于容易题，注重基础知识、基本运算能力的考查.

5.已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$（$a>0$）的离心率是 $\sqrt{5}$ 则 a=

A. $\sqrt{6}$　　B. 4　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】

本题根据根据双曲线的离心率的定义，列关于 A 的方程求解.

【详解】分析：详解： ∵双曲线的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}$ ，$c=\sqrt{a^2+1}$ ，

$\therefore\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}=\sqrt{5}$ ，

解得 $a=\dfrac{1}{2}$ ，

故选 D.

【点睛】对双曲线基础知识和基本计算能力的考查.

6.设函数 f（x）=cos$x$+$b$sin$x$（b 为常数），则“b=0”是“f（x）为偶函数”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】

根据定义域为R的函数$f(x)$为偶函数等价于$f(-x)=f(x)$进行判断.

【详解】$b=0$ 时，$f(x)=\cos x+b\sin x=\cos x$，$f(x)$为偶函数；

$f(x)$为偶函数时，$f(-x)=f(x)$对任意的x恒成立，

$f(-x)=\cos(-x)+b\sin(-x)=\cos x-b\sin x$

$\cos x+b\sin x=\cos x-b\sin x$ ，得$bsinx=0$对任意的x恒成立，从而$b=0$.从而“$b=0$”是“$f(x)$为偶函数”的充分必要条件，故选C.

【点睛】本题较易，注重重要知识、基础知识、逻辑推理能力的考查.

7.在天文学中，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述.两颗星的星等与亮度满足$m_2-m_1=\frac{5}{2}\lg\frac{E_1}{E_2}$，其中星等为$m_1$的星的亮度为$E_2$（$k$=1,2）.已知太阳的星等是﹣26.7，天狼星的星等是﹣1.45，则太阳与天狼星的亮度的比值为

A. $10^{10.1}$　　B. 10.1　　C. lg10.1　　D. $10^{-10.1}$

【答案】D

【解析】

【分析】

先求出$\lg\frac{E_1}{E_2}$，然后将对数式换为指数式求$\frac{E_1}{E_2}$，再求$\frac{E_1}{E_2}$.

【详解】两颗星的星等与亮度满足$m_2-m_1=\frac{5}{2}\lg\frac{E_1}{E_2}$，

令$m_2=-1.45$ ，$m_1=-26.7$ ，

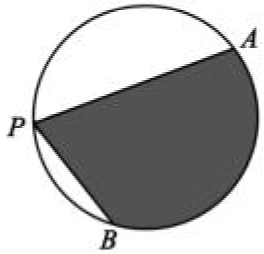
$\lg\frac{E_1}{E_2}=\frac{2}{5}\left(m_2-m_1\right)=\frac{2}{5}(-1.45+26.7)=10.1$，

$\frac{E_1}{E_2}=10^{10.1}\cdot\frac{E_2}{E_1}=10^{-10.1}$ ，

故选 D.

【点睛】考查考生的数学应用意识、信息处理能力、阅读理解能力以及指数对数运算.

8.如图，A，B 是半径为 2 的圆周上的定点，P 为圆周上的动点，$\angle APB$ 是锐角，大小为β.图中阴影区域的面积的最大值为



A. $4\beta+4\cos\beta$　　B. $4\beta+4\sin\beta$　　C. $2\beta+2\cos\beta$　　D. $2\beta+2\sin\beta$

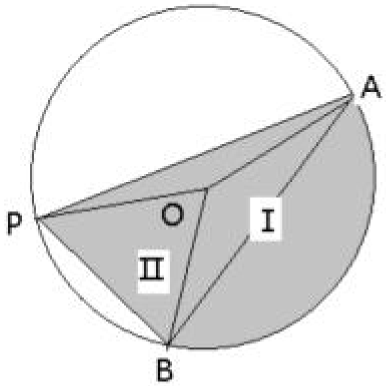
【答案】B

【解析】

【分析】

阴影部分的面积 $S=S_{\triangle PAB}+S_1-S_{\triangle OAB}$.其中 S_1. $S_{\triangle OAB}$ 的值为定值.当且仅当 $S_{\triangle PAB}$ 取最大值时阴影部分的面积 S 取最大值.

【详解】观察图象可知，当 P 为弧 AB 的中点时，阴影部分的面积 S 取最大值，



此时 $\angle BOP=\angle AOP=\pi-\beta$, 面积 S的最大值为$\beta r^2+S_{\triangle POB}+S_{\triangle POA}=4\beta+\frac{1}{2}|OP||OB|\sin(\pi-\beta)+\frac{1}{2}|OP||OA|Sin(\pi-\beta)$

$=4\beta+2Sin\beta+2Sin\beta=4\beta+4\ Sin\beta$，故选 B.

【点睛】本题主要考查阅读理解能力、数学应用意识、数形结合思想及数学式子变形和运算求解能力，有一定的难度.关键观察分析区域面积最大时的状态，并将面积用边角等表示.

第二部分（非选择题　　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9.已知向量 a =（−4，3），b =（6，m），且 $\vec{a} \perp \vec{b}$，则 m=_________.

【答案】8.

【解析】

【分析】

利用 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 转化得到 $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$ 加以计算，得到 m.

【详解】向量 $\vec{a} =（-4,3）$，$\vec{b} =（6,m）$，$\vec{a} \perp \vec{b}$，

则 $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0, -4 \times 6 + 3m = 0$，$m = 8$.

【点睛】本题考查平面向量的坐标运算、平面向量的数量积、平面向量的垂直以及转化与化归思想的应用.属于容易题.

10.若 x，y 满足 $\begin{cases} x \le 2, \\ y \ge -1, \\ 4x - 3y + 1 \ge 0, \end{cases}$ 则 $y - x$ 的最小值为_________，最大值为_________.

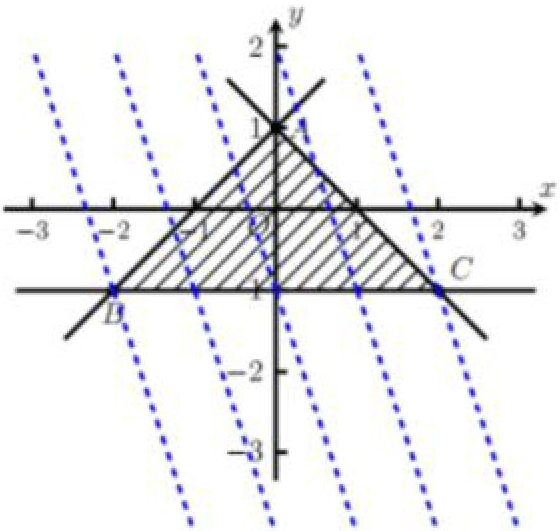
【答案】　(1). -3.　(2). 1.

【解析】

【分析】

作出可行域，移动目标函数表示的直线，利用图解法求解.

【详解】作出可行域如图阴影部分所示.



设 $z=y-x$,则 $y=x+z$.当直线 l_0：$y=x+z$ 经过点 A（2,-1）时,z 取最小值-3，经过点 B（2,3）时,z 取最大值 1.

【点睛】本题是简单线性规划问题的基本题型，根据“画、移、解”等步骤可得解.题目难度不大题，注重了基础知识、基本技能的考查.

11.设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l.则以 F 为圆心，且与 l 相切的圆的方程为__________.

【答案】$(x-1)^2+y^2=4$.

【解析】

【分析】

由抛物线方程可得焦点坐标，即圆心，焦点到准线距离即半径，进而求得结果.

【详解】抛物线 $y^2=4x$ 中，$2P=4$，$P=2$，

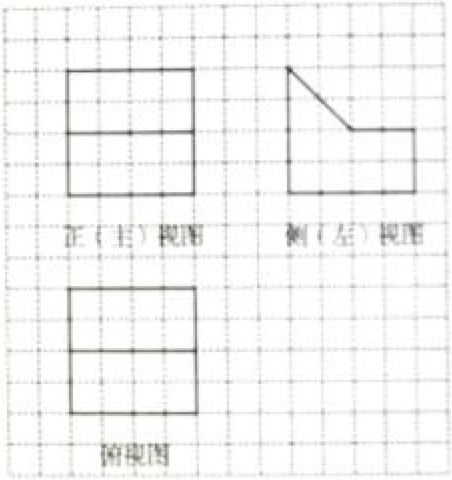
焦点 F（1,0），准线 l 的方程为 $x=-1$，

以 F 为圆心，

且与 l 相切的圆的方程为 $(x-1)^2+y^2=2^2$,即为$(x-1)^2+y^2=4$.

【点睛】本题可采用数形结合法，只要画出图形，即可很容易求出结果.

12.某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得，其三视图如图所示．如果网格纸上小正方形的边长为 1，那么该几何体的体积为__________.



【答案】40.

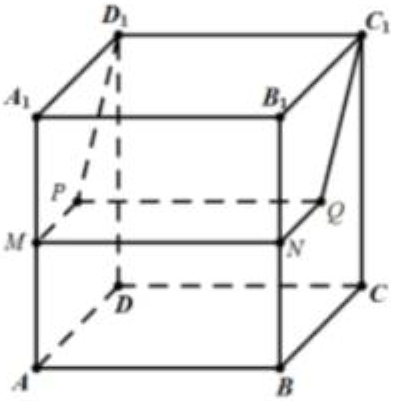
【解析】

【分析】

画出三视图对应的几何体，应用割补法求几何体的体积.

【详解】在正方体中还原该几何体，如图所示

几何体的体积 $V=4^3-\frac{1}{2}$（2+4）×2×4=40



【点睛】易错点有二，一是不能正确还原几何体；二是计算体积有误.为避免出错，应注重多观察、细心算.

13.已知 l，m 是平面 α 外的两条不同直线．给出下列三个论断：

①$l\perp m$；②$m/\!/\alpha$；③$l\perp\alpha$．

以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：__________.

【答案】如果 $l\perp\alpha$，$m/\!/\alpha$，则 $l\perp m$.

【解析】

【分析】

将所给论断，分别作为条件、结论加以分析.

【详解】将所给论断，分别作为条件、结论，得到如下三个命题：

（1）如果 $l\perp\alpha$，$m/\!/\alpha$，则 $l\perp m$. 正确；

（2）如果 $l\perp\alpha$，$l\perp m$，则 $m/\!/\alpha$.不正确，有可能 m 在平面α内；

（3）如果 $l\perp m$，$m/\!/\alpha$，则 $l\perp\alpha$.不正确，有可能 l 与α斜交、$l/\!/\alpha$.

【点睛】本题主要考查空间线面的位置关系、命题、逻辑推理能力及空间想象能力.

14.李明自主创业，在网上经营一家水果店，销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃，价格依次为60元/盒、65元/盒、80元/盒、90元/盒．为增加销量，李明对这四种水果进行促销：一次购买水果的总价达到120元，顾客就少付 x 元．每笔订单顾客网上支付成功后，李明会得到支付款的80%.

①当 x=10时，顾客一次购买草莓和西瓜各1盒，需要支付__________元；

②在促销活动中，为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则 x 的最大值为__________.

【答案】 (1). 130. (2). 15.

【解析】

【分析】

（1）将购买的草莓和西瓜加钱与120进行比较，再根据促销规则可的结果；

（2）根据 $y<120$、$y\geq 120$ 分别探究.

【详解】（1）x=10，顾客一次购买草莓和西瓜各一盒，

需要支付（60+80）-10=130元.

（2）设顾客一次购买水果的促销前总价为 y 元，

$y<120$ 元时，李明得到的金额为 $y\times 80\%$，符合要求.

$y\geq 120$ 元时，有（y-x）×80%≥y×70%成立，

即8（y-x）≥7y，$x\leq\dfrac{y}{8}$，即 $x\leq\left(\dfrac{y}{8}\right)_{min}$=15元.

所以 x 的最大值为15.

【点睛】本题主要考查不等式的概念与性质、数学的应用意识、数学式子变形与运算求解能力，有一定难度.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15.在△ABC 中，a=3，$b-c=2$，cos$B$=$-\dfrac{1}{2}$.

（Ⅰ）求 b，c 的值；

（Ⅱ）求 sin（B+C）的值.

【答案】（Ⅰ）$\begin{cases}b=7\\c=5\end{cases}$；

（Ⅱ）$\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.

【解析】

【分析】

(Ⅰ)由题意列出关于 a,b,c 的方程组，求解方程组即可确定 b,c 的值；

(Ⅱ)由题意结合余弦定理、同角三角函数基本关系和诱导公式可得$\sin\left(B+C\right)$的值.

【详解】（Ⅰ）由余弦定理可得$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\dfrac{1}{2}$，

因为$a=3$，所以$c^2-b^2+3c+9=0$；因为$b-c=2$，所以解得$\begin{cases}b=7\\c=5\end{cases}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$a=3,b=7,c=5$，所以$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{13}{14}$；

因为A为ΔABC的内角，所以$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.

因为$\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.

【点睛】本题主要考查余弦定理的应用，同角三角函数基本关系、诱导公式的应用等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

16.设$\{a_n\}$是等差数列，a_1=﹣10，且 a_2+10，a_3+8，a_4+6 成等比数列.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）记$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，求 S_n 的最小值.

【答案】（Ⅰ）$a_n=2n-12$；

（Ⅱ）当$n=5$或者$n=6$时，S_n取到最小值-30.

【解析】

【分析】

(Ⅰ)由题意首先求得数列的公差，然后利用等差数列通项公式可得$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)首先求得S_n的表达式，然后结合二次函数的性质可得其最小值.

【详解】（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

因为a_2+10，a_3+8，a_4+6成等比数列，所以$(a_3+8)^2=(a_2+10)(a_4+6)$，

即$(2d-2)^2=d(3d-4)$，解得$d=2$，所以$a_n=-10+2(n-1)=2n-12$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$a_n=2n-12$，

所以$S_n=\dfrac{-10+2n-12}{2}\times n=n^2-11n=(n-\dfrac{11}{2})^2-\dfrac{121}{4}$；

当$n=5$或者$n=6$时，S_n取到最小值-30.

【点睛】等差数列基本量的求解是等差数列中的一类基本问题，解决这类问题的关键在于熟练掌握等差数列的有关公式并能灵活运用.

17.改革开放以来，人们的支付方式发生了巨大转变．近年来，移动支付已成为主要支付方式之一．为了解某校学生上个月A，B两种移动支付方式的使用情况，从全校所有的1000名学生中随机抽取了100人，发现样本中A，B两种支付方式都不使用的有5人，样本中仅使用A和仅使用B的学生的支付金额分布情况如下：

支付金额 支付方式	不大于2000元	大于2000元
仅使用A	27人	3人

仅使用 B	24 人	1 人

（Ⅰ）估计该校学生中上个月 A，B 两种支付方式都使用的人数；

（Ⅱ）从样本仅使用 B 的学生中随机抽取 1 人，求该学生上个月支付金额大于 2000 元的概率；

（Ⅲ）已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化．现从样本仅使用 B 的学生中随机抽查 1 人，发现他本月的支付金额大于 2000 元．结合（Ⅱ）的结果，能否认为样本仅使用 B 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化？说明理由．

【答案】（Ⅰ）400 人；

（Ⅱ）$\frac{1}{25}$；

（Ⅲ）见解析.

【解析】

【分析】

(Ⅰ)由题意利用频率近似概率可得满足题意的人数；

(Ⅱ)利用古典概型计算公式可得上个月支付金额大于 2000 元的概率；

(Ⅲ)结合概率统计相关定义给出结论即可.

【详解】（Ⅰ）由图表可知仅使用 A 的人数有 30 人，仅使用 B 的人数有 25 人，

由题意知 A,B 两种支付方式都不使用的有 5 人，

所以样本中两种支付方式都使用的有$100-30-25-5=40$，

所以全校学生中两种支付方式都使用的有$\frac{40}{100}\times 1000=400$（人）.

（Ⅱ）因为样本中仅使用 B 的学生共有 25 人，只有 1 人支付金额大于 2000 元，

所以该学生上个月支付金额大于 2000 元的概率为$\frac{1}{25}$.

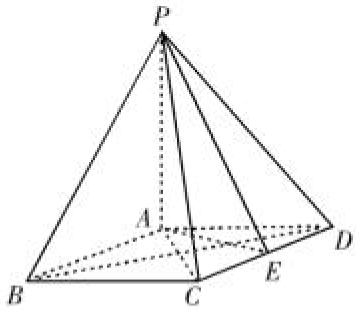
（Ⅲ）由（Ⅱ）知支付金额大于 2000 元的概率为$\frac{1}{25}$，

因为从仅使用 B 的学生中随机调查 1 人，发现他本月的支付金额大于 2000 元，

依据小概率事件它在一次试验中是几乎不可能发生的，所以可以认为仅使用 B 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化，且比上个月多.

【点睛】本题主要考查古典概型概率公式及其应用，概率的定义与应用等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

18.如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面$ABCD$，底部$ABCD$为菱形，E为CD的中点.



（Ⅰ）求证：$BD\perp$平面PAC；

（Ⅱ）若$\angle ABC=60°$，求证：平面$PAB\perp$平面PAE；

（Ⅲ）棱PB上是否存在点F，使得$CF//$平面PAE？说明理由.

【答案】（Ⅰ）见解析；

（Ⅱ）见解析；

（Ⅲ）见解析.

【解析】

【分析】

(Ⅰ)由题意利用线面垂直的判定定理即可证得题中的结论；

(Ⅱ)由几何体的空间结构特征首先证得线面垂直，然后利用面面垂直的判断定理可得面面垂直；

(Ⅲ)由题意，利用平行四边形的性质和线面平行的判定定理即可找到满足题意的点.

【详解】（Ⅰ）证明：因为$PA\perp$平面$ABCD$,所以$PA\perp BD$；

因为底面$ABCD$是菱形，所以$AC\perp BD$；

因为$PA\bigcap AC=A, PA, AC\subset$平面$PAC$，

所以$BD\perp$平面PAC.

（Ⅱ）证明：因为底面$ABCD$是菱形且$\angle ABC=60°$，所以ΔACD为正三角形，所以$AE\perp CD$，

因为$AB//CD$,所以$AE\perp AB$；

因为$PA\perp$平面$ABCD$，$AE\subset$平面$ABCD$，

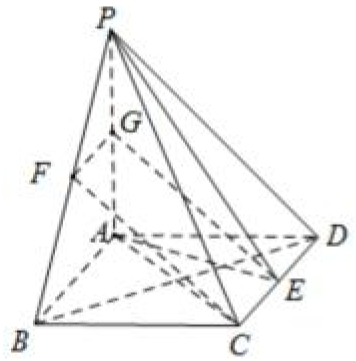
所以$AE\perp PA$；

因为$PA\bigcap AB=A$

所以$AE\perp$平面PAB，

$AE\subset$平面PAE,所以平面$PAB\perp$平面PAE.

（Ⅲ）存在点 F 为 PB 中点时，满足 CF // 平面 PAE；理由如下:



分别取 PB,PA 的中点 F,G，连接 CF,FG,EG，

在三角形 PAB 中，$FG//AB$ 且 $FG=\dfrac{1}{2}AB$；

在菱形 $ABCD$ 中，E 为 CD 中点，所以 $CE//AB$ 且 $CE=\dfrac{1}{2}AB$，所以 $CE//FG$ 且 $CE=FG$，即四边形 $CEGF$ 为平行四边形，所以 CF // EG；

又 $CF\not\subset$ 平面 PAE，$EG\subset$ 平面 PAE，所以 CF // 平面 PAE.

【点睛】本题主要考查线面垂直的判定定理，面面垂直的判定定理，立体几何中的探索问题等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

19.已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点为 $(1,0)$，且经过点 $A(0,1)$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 O 为原点，直线 $l:y=kx+t(t\neq\pm1)$ 与椭圆 C 交于两个不同点 P，Q，直线 AP 与 x 轴交于点 M，直线 AQ 与 x 轴交于点 N，若 $|OM|\cdot|ON|=2$，求证：直线 l 经过定点.

【答案】（Ⅰ）$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$；

（Ⅱ）见解析.

【解析】

【分析】

(Ⅰ)由题意确定 a,b 的值即可确定椭圆方程；

(Ⅱ)设出直线方程，联立直线方程与椭圆方程确定 OM,ON 的表达式，结合韦达定理确定 t 的值即可证明直

线恒过定点.

【详解】(Ⅰ) 因为椭圆的右焦点为$(1,0)$，所以$\frac{12}{25}$；

因为椭圆经过点$A(0,1)$,所以$b=1$，所以$a^2=b^2+c^2=2$，故椭圆的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(Ⅱ) 设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=kx+t(t\neq 1)\end{cases}$ 得$(1+2\mathrm{k}^2)x^2+4ktx+2t^2-2=0$，

$\Delta>0,x_1+x_2=-\frac{4kt}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2t^2-2}{1+2k^2}$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2t=\frac{2t}{1+2k^2}$，

$y_1y_2=k^2x_1x_2+kt(x_1+x_2)+t^2=\frac{t^2-2k^2}{1+2k^2}$.

直线$AP:y-1=\frac{y_1-1}{x_1}x$，令$y=0$得$x=\frac{-x_1}{y_1-1}$，即$|OM|=\left|\frac{-x_1}{y_1-1}\right|$；

同理可得$|ON|=\left|\frac{-x_2}{y_2-1}\right|$.

因为$|OM||ON|=2$,所以$\left|\frac{-x_1}{y_1-1}\right|\left|\frac{-x_2}{y_2-1}\right|=\left|\frac{x_1x_2}{y_1y_2-(y_1+y_2)+1}\right|=2$；

$\left|\frac{t^2-1}{t^2-2t+1}\right|=1$，解之得$t=0$，所以直线方程为$y=kx$，所以直线$l$恒过定点$(0,0)$.

【点睛】解决直线与椭圆的综合问题时，要注意：

(1)注意观察应用题设中的每一个条件，明确确定直线、椭圆的条件；

(2)强化有关直线与椭圆联立得出一元二次方程后的运算能力，重视根与系数之间的关系、弦长、斜率、三角形的面积等问题.

20.已知函数$f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$.

(Ⅰ) 求曲线$y=f(x)$的斜率为1的切线方程；

(Ⅱ) 当$x\in[-2,4]$时，求证：$x-6\leq f(x)\leq x$；

（III）设 $F(x)=|f(x)-(x+a)|\,(a\in\mathbf{R})$，记 $F(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上的最大值为 M（a），当 M（a）最小时，求 a 的值.

【答案】（I）$x-y=0$ 和 $27x-27y-64=0$.

（II）见解析；

（III）$a=-3$.

【解析】

【分析】

(I)首先求解导函数，然后利用导函数求得切点的横坐标，据此求得切点坐标即可确定切线方程；

(II)由题意分别证得 $f\left(x\right)-\left(x-6\right)\geq 0$ 和 $f\left(x\right)-x\leq 0$ 即可证得题中的结论；

(III)由题意结合(II)中的结论分类讨论即可求得 a 的值.

【详解】（I）$f'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-2x+1$，令 $f'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-2x+1=1$ 得 $x=0$ 或者 $x=\dfrac{8}{3}$.

当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，此时切线方程为 $y=x$，即 $x-y=0$；

当 $x=\dfrac{8}{3}$ 时，$f(\dfrac{8}{3})=\dfrac{8}{27}$，此时切线方程为 $y=x-\dfrac{64}{27}$，即 $27x-27y-64=0$；

综上可得所求切线方程为 $x-y=0$ 和 $27x-27y-64=0$.

（II）设 $g(x)=f(x)-x=\dfrac{1}{4}x^3-x^2$，$g'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-2x$，令 $g'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-2x=0$ 得 $x=0$ 或者 $x=\dfrac{8}{3}$，

所以当 $x\in[-2,0]$ 时，$g'(x)\geq 0$，$g(x)$ 为增函数；当 $x\in(0,\dfrac{8}{3})$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数；当 $x\in[\dfrac{8}{3},4]$ 时，$g'(x)\geq 0$，$g(x)$ 为增函数；

而 $g(0)=g(4)=0$，所以 $g(x)\leq 0$，即 $f(x)\leq x$；

同理令 $h(x)=f(x)-x+6=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+6$，可求其最小值为 $h(-2)=0$，所以 $h(x)\geq 0$，即 $f(x)\geq x-6$，

综上可得 $x-6\leq f(x)\leq x$.

（III）由（II）知 $-6\leq f(x)-x\leq 0$，

所以 $M(a)$ 是 $|a|,|a+6|$ 中的较大者，

若 $|a|\geq|a+6|$，即 $a\leqslant -3$ 时，$M(a)=|a|=-a\geq 3$；

若 $|a|<|a+6|$，即 $a>-3$ 时，$M(a)=|a+6|=a+6>3$；

所以当$M(a)$最小时，$M(a)=3$，此时3π.

【点睛】本题主要考查利用导函数研究函数的切线方程，利用导函数证明不等式的方法，分类讨论的数学思想等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.