2019年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理）（北京卷）参考答案

一、选择题（共8小题，每小题5分，共40分）

（1）D　（2）B　（3）D　（4）B　（5）C　（6）A　（7）C　（8）C

二、填空题（共6小题，每小题5分，共30分）

（9）$\dfrac{\pi}{2}$　（10）0　-10　（11）40　（12）若$l\perp m$，$l\perp\alpha$，则$m/\!/\alpha$.（答案不唯一）

（13）-1　$(-\infty,0]$　（14）130　15

三、解答题（共6小题，共80分）

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得

$$b^2=3^2+c^2-2\times3\times c\times\left(-\frac{1}{2}\right).$$

因为$b=c+2$，

所以$(c+2)^2=3^2+c^2-2\times3\times c\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

解得$c=5$.

所以$b=7$.

（Ⅱ）由$\cos B=-\dfrac{1}{2}$得$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

由正弦定理得$\sin C=\dfrac{c}{b}\sin B=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$.

在$\triangle ABC$中，$\angle B$是钝角，

所以$\angle C$为锐角.

所以$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\dfrac{11}{14}$.

所以$\sin(B-C)=\sin B\cos C-\cos B\sin C=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

（16）（共14分）

解：（Ⅰ）因为$PA\perp$平面$ABCD$，所以$PA\perp CD$.

又因为$AD\perp CD$，所以$CD\perp$平面PAD.

（Ⅱ）过A作AD的垂线交BC于点M.

因为$PA\perp$平面$ABCD$，所以$PA\perp AM$，$PA\perp AD$.

如图建立空间直角坐标系A-xyz，则A（0，0，0），B（2，−1，0），C（2，2，0），D（0，2，0），P（0，0，2）.

因为E为PD的中点，所以E（0，1，1）.

所以 $\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$，$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$.

所以 $\overrightarrow{PF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PF}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

设平面AEF的法向量为$\boldsymbol{n}$=（x，y，z），则

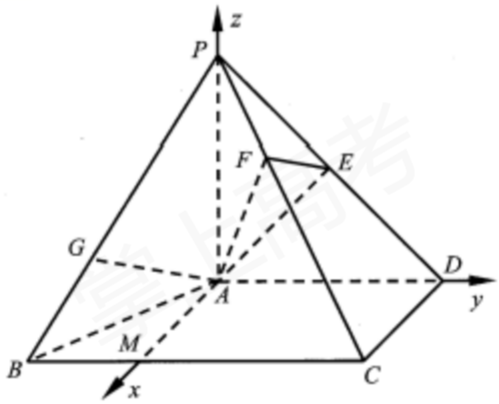
$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}y+z=0,\\ \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{4}{3}z=0.\end{cases}$$

令z=1，则 $y=-1$，$x=-1$.

于是 $\boldsymbol{n}=(-1,-1,1)$.

又因为平面PAD的法向量为$\boldsymbol{p}$=（1，0，0），所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{p}|}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

由题知，二面角F-AE-P为锐角，所以其余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.



（Ⅲ）直线AG在平面AEF内.

因为点G在PB上，且$\frac{PG}{PB}=\frac{2}{3}$，$\overrightarrow{PB}=(2,-1,-2)$，

所以$\overrightarrow{PG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PB}=\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right),\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PG}=\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

由（Ⅱ）知，平面AEF的法向量$\boldsymbol{n}=(-1,-1,1)$.

所以$\overrightarrow{AG}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0$.

所以直线AG在平面AEF内.

（17）（共13分）

解：（Ⅰ）由题意知，样本中仅使用A的学生有18+9+3=30人，仅使用B的学生有10+14+1=25人，A，B两种支付方式都不使用的学生有5人.

故样本中A，B两种支付方式都使用的学生有100−30−25−5=40人.

所以从全校学生中随机抽取1人，该学生上个月A，B两种支付方式都使用的概率估计为$\frac{40}{100}=0.4$.

（Ⅱ）X的所有可能值为0，1，2.

记事件C为“从样本仅使用A的学生中随机抽取1人，该学生上个月的支付金额大于1000元”，事件D为“从样本仅使用B的学生中随机抽取1人，该学生上个月的支付金额大于1000元”.

由题设知，事件C，D相互独立，且$P(C)=\frac{9+3}{30}=0.4,\quad P(D)=\frac{14+1}{25}=0.6$.

所以$P(X=2)=P(CD)=P(C)P(D)=0.24$，

$P(X=1)=P(C\bar{D}\cup\bar{C}D)$

$=P(C)P(\bar{D})+P(\bar{C})P(D)$

=0.4×（1−0.6）+（1−0.4）×0.6

=0.52，

$P(X=0)=P(\bar{C}\bar{D})=P(\bar{C})P(\bar{D})=0.24$.

所以X的分布列为

X	0	1	2
P	0.24	0.52	0.24

故X的数学期望E（X）=0×0.24+1×0.52+2×0.24=1.

（Ⅲ）记事件E为“从样本仅使用A的学生中随机抽查3人，他们本月的支付金额都大于2000元”.

假设样本仅使用A的学生中，本月支付金额大于2000元的人数没有变化，则由上个月的样本数据得

$P(E)=\frac{1}{C_{30}^{3}}=\frac{1}{4060}$.

答案示例1：可以认为有变化.理由如下：

P（E）比较小，概率比较小的事件一般不容易发生.一旦发生，就有理由认为本月的支付金额大于2000元的人数发生了变化.所以可以认为有变化.

答案示例2：无法确定有没有变化.理由如下：

事件E是随机事件，P（E）比较小，一般不容易发生，但还是有可能发生的，所以无法确定有没有变化.

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由抛物线$C:x^2=-2py$经过点$(2,-1)$，得 $p=2$.

所以抛物线C的方程为$x^2=-4y$，其准线方程为$y=1$.

（Ⅱ）抛物线C的焦点为$F(0,-1)$.

设直线l的方程为$y=kx-1(k\neq 0)$.

由$\begin{cases}y=kx-1,\\ x^2=-4y\end{cases}$得$x^2+4kx-4=0$.

设$M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$，则$x_1x_2=-4$.

直线OM的方程为$y=\frac{y_1}{x_1}x$.

令$y=-1$，得点A的横坐标$x_A=-\frac{x_1}{y_1}$.

同理得点B的横坐标$x_B=-\frac{x_2}{y_2}$.

设点$D(0,n)$，则$\overrightarrow{DA}=\left(-\frac{x_1}{y_1},-1-n\right),\overrightarrow{DB}=\left(-\frac{x_2}{y_2},-1-n\right)$,

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{x_1x_2}{y_1y_2}+(n+1)^2$

$=\frac{x_1x_2}{\left(-\frac{x_1^2}{4}\right)\left(-\frac{x_2^2}{4}\right)}+(n+1)^2$

$=\dfrac{16}{x_1x_2}+(n+1)^2$

$=-4+(n+1)^2$.

令 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，即 $-4+(n+1)^2=0$，则 $n=1$ 或 $n=-3$.

综上，以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的定点 $(0,1)$ 和 $(0,-3)$.

（19）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+x$ 得 $f'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-2x+1$.

令 $f'(x)=1$，即 $\dfrac{3}{4}x^2-2x+1=1$，得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{8}{3}$.

又 $f(0)=0$，$f(\dfrac{8}{3})=\dfrac{8}{27}$，

所以曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程是 $y=x$ 与 $y-\dfrac{8}{27}=x-\dfrac{8}{3}$，

即 $y=x$ 与 $y=x-\dfrac{64}{27}$.

（Ⅱ）令 $g(x)=f(x)-x, x\in[-2,4]$.

由 $g(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2$ 得 $g'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-2x$.

令 $g'(x)=0$ 得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{8}{3}$.

$g'(x), g(x)$ 的情况如下：

x	-2	$(-2,0)$	0	$(0,\frac{8}{3})$	$\frac{8}{3}$	$(\frac{8}{3},4)$	4
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$	-6	↗	0	↘	$-\frac{64}{27}$	↗	0

所以 $g(x)$ 的最小值为 -6，最大值为 0.

故 $-6\le g(x)\le 0$，即 $x-6\le f(x)\le x$.

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，

当 $a<-3$ 时，$M(a)\ge F(0)=|g(0)-a|=-a>3$；

当 $a>-3$ 时，$M(a)\ge F(-2)=|g(-2)-a|=6+a>3$；

当 $a=-3$ 时，$M(a)=3$.

综上，当 $M(a)$ 最小时，$a=-3$.

（20）（共13分）

解：（Ⅰ）1，3，5，6.（答案不唯一）

（Ⅱ）设长度为q末项为 a_{n_0} 的一个递增子列为 $a_{r_1},a_{r_2},\cdots,a_{r_{q-1}},a_{n_0}$.

由$p<q$，得 $a_{r_p}\le a_{r_{q-1}}<a_{n_0}$.

因为$\{a_n\}$的长度为p的递增子列末项的最小值为 a_{m_0}，

又 $a_{r_1},a_{r_2},\cdots,a_{r_p}$ 是$\{a_n\}$的长度为p的递增子列，

所以 $a_{m_0}\le a_{r_p}$.

所以 $a_{m_0}<a_{n_0}$.

（Ⅲ）由题设知，所有正奇数都是$\{a_n\}$中的项.

先证明：若$2m$是$\{a_n\}$中的项，则$2m$必排在$2m-1$之前（m为正整数）.

假设$2m$排在$2m-1$之后.

设 $a_{p_1},a_{p_2},\cdots,a_{p_{m-1}},2m-1$ 是数列$\{a_n\}$的长度为m末项为$2m-1$的递增子列，则 $a_{p_1},a_{p_2},\cdots,a_{p_{m-1}},2m-1,2m$ 是数列$\{a_n\}$的长度为$m+1$末项为$2m$的递增子列.与已知矛盾.

再证明：所有正偶数都是$\{a_n\}$中的项.

假设存在正偶数不是$\{a_n\}$中的项，设不在$\{a_n\}$中的最小的正偶数为$2m$.

因为$2k$排在$2k-1$之前（$k=1，2，…，m-1$），所以$2k$和$2k-1$不可能在$\{a_n\}$的同一个递增子列中.

又$\{a_n\}$中不超过$2m+1$的数为1，2，…，$2m-2$，$2m-1$，$2m+1$，所以$\{a_n\}$的长度为$m+1$且末项为$2m+1$的递增子列个数至多为$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{(m-1)\text{个}}\times1\times1=2^{m-1}<2^m$.

与已知矛盾.

最后证明：$2m$排在$2m-3$之后（$m\ge2$为整数）.

假设存在$2m$（$m\ge2$），使得$2m$排在$2m-3$之前，则$\{a_n\}$的长度为$m+1$且末项为$2m+1$的递增子列的个数小

于 2^m.与已知矛盾.

综上，数列$\{a_n\}$只可能为2，1，4，3，…，$2m-3$，$2m$，$2m-1$，⋯.

经验证，数列2，1，4，3，…，$2m-3$，$2m$，$2m-1$，…符合条件.

所以 $a_n=\begin{cases} n+1, n\text{为奇数}, \\ n-1, n\text{为偶数}. \end{cases}$