2019 年普通高等学校招生全国统一考试

数　学（理）（北京卷）

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

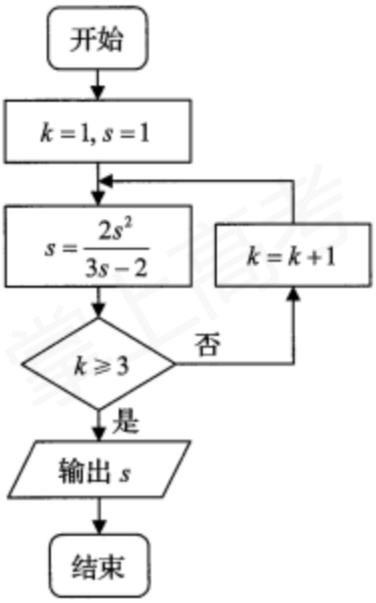
第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知复数 z=2+i，则 $z\cdot\overline{z}=$

（A）$\sqrt{3}$　　（B）$\sqrt{5}$　　（C）3　　（D）5

（2）执行如图所示的程序框图，输出的 s 值为



（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（3）已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+3t, \\ y=2+4t \end{cases}$（$t$ 为参数），则点（1，0）到直线 l 的距离是

（A）$\dfrac{1}{5}$　　（B）$\dfrac{2}{5}$　　（C）$\dfrac{4}{5}$　　（D）$\dfrac{6}{5}$

（4）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，则

（A）$a^2=2b^2$　　（B）$3a^2=4b^2$　　（C）$a=2b$　　（D）$3a=4b$

（5）若 x，y 满足 $|x|\leq 1-y$，且 $y\geq -1$，则 $3x+y$ 的最大值为

（A）−7　　（B）1　　（C）5　　（D）7

（6）在天文学中，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述．两颗星的星等与亮度满足 $m_2-m_1=\frac{5}{2}\lg\frac{E_1}{E_2}$，其中星等为 m_k 的星的亮度为 E_k（k=1，2）．已知太阳的星等是−26.7，天狼星的星等是−1.45，则太阳与天狼星的亮度的比值为

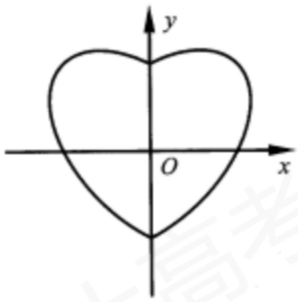
（A）$10^{10.1}$　　（B）10.1　　（C）lg10.1　　（D）$10^{-10.1}$

（7）设点 A，B，C 不共线，则“$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为锐角”是“$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，曲线 C：$x^2+y^2=1+|x|y$ 就是其中之一（如图）．给出下列三个结论：



①曲线 C 恰好经过 6 个整点（即横、纵坐标均为整数的点）；

②曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$；

③曲线 C 所围成的“心形”区域的面积小于 3．

其中，所有正确结论的序号是

（A）①　　（B）②　　（C）①②　　（D）①②③

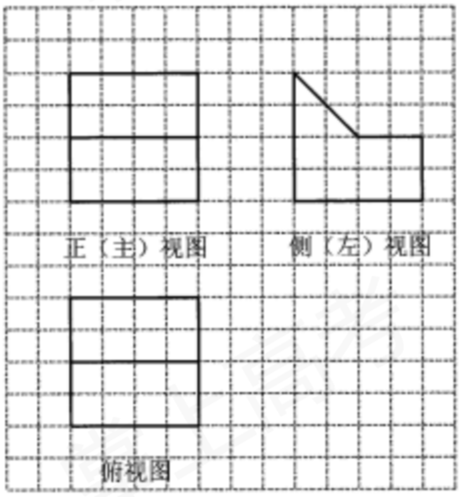
第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）函数 $f(x)=\sin^2 2x$ 的最小正周期是__________．

（10）设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2=-3$，$S_5=-10$，则 a_5=__________，S_n 的最小值为__________．

（11）某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得，其三视图如图所示．如果网格纸上小正方形的边长为 1，那么该几何体的体积为__________．



（12）已知 l，m 是平面 α 外的两条不同直线．给出下列三个论断：

①$l\perp m$；　　②$m/\!/\alpha$；　　③$l\perp\alpha$．

以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：__________．

（13）设函数 $f(x)=e^x+ae^{-x}$（a 为常数）．若 $f(x)$ 为奇函数，则 $a=$________；若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则 a 的取值范围是___________．

（14）李明自主创业，在网上经营一家水果店，销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃，价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒．为增加销量，李明对这四种水果进行促销：一次购买水果的总价达到 120 元，顾客就少付 x 元．每笔订单顾客网上支付成功后，李明会得到支付款的 80%.

①当 $x=10$ 时，顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒，需要支付__________元；

②在促销活动中，为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则 x 的最大值为__________．

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题 13 分）

在△ABC 中，$a=3$，$b-c=2$，$\cos B=-\dfrac{1}{2}$．

（Ⅰ）求 b，c 的值；

（Ⅱ）求 $\sin(B-C)$ 的值．

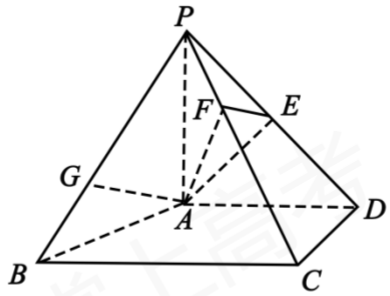
（16）（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P\text{–}ABCD$ 中，$PA\perp$平面 $ABCD$，$AD\perp CD$，$AD/\!/BC$，$PA=AD=CD=2$，$BC=3$．E 为 PD 的中点，点 F 在 PC 上，且 $\dfrac{PF}{PC}=\dfrac{1}{3}$．

（Ⅰ）求证：$CD\perp$平面 PAD；

（Ⅱ）求二面角 $F–AE–P$ 的余弦值；

（Ⅲ）设点 G 在 PB 上，且 $\dfrac{PG}{PB}=\dfrac{2}{3}$．判断直线 AG 是否在平面 AEF 内，说明理由．



（17）（本小题 13 分）

改革开放以来，人们的支付方式发生了巨大转变．近年来，移动支付已成为主要支付方式之一．为了解某校学生上个月 A，B 两种移动支付方式的使用情况，从全校学生中随机抽取了 100 人，发现样本中 A，B 两种支付方式都不使用的有 5 人，样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下：

支付金额（元） 支付方式	（0，1000]	（1000，2000]	大于 2000
仅使用 A	18 人	9 人	3 人
仅使用 B	10 人	14 人	1 人

（Ⅰ）从全校学生中随机抽取 1 人，估计该学生上个月 A，B 两种支付方式都使用的概率；

（Ⅱ）从样本仅使用 A 和仅使用 B 的学生中各随机抽取 1 人，以 X 表示这 2 人中上个月支付金额大于 1000 元的人数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化．现从样本仅使用 A 的学生中，随机抽查 3 人，发现他们本月的支付金额都大于 2000 元．根据抽查结果，能否认为样本仅使用 A 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化？说明理由．

（18）（本小题 14 分）

已知抛物线 C：$x^2=-2py$ 经过点（2，−1）．

（Ⅰ）求抛物线 C 的方程及其准线方程；

（Ⅱ）设 O 为原点，过抛物线 C 的焦点作斜率不为 0 的直线 l 交抛物线 C 于两点 M，N，直线 $y=-1$ 分别交直线 OM，ON 于点 A 和点 B．求证：以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点．

（19）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+x$．

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程；

（Ⅱ）当 $x\in[-2,4]$ 时，求证：$x-6\le f(x)\le x$；

（Ⅲ）设 $F(x)=|f(x)-(x+a)|\ (a\in\mathbf{R})$，记 $F(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上的最大值为 M（a）．当 M（a）最小时，求 a 的值．

（20）（本小题 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$，从中选取第 i_1 项、第 i_2 项、…、第 i_m 项（$i_1<i_2<\cdots<i_m$），若 $a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_m}$，则称新数列 a_{i_1}，a_{i_2}，…，a_{i_m} 为 $\{a_n\}$ 的长度为 m 的递增子列．规定：数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是 $\{a_n\}$ 的长度为 1 的递增子列．

（Ⅰ）写出数列 1，8，3，7，5，6，9 的一个长度为 4 的递增子列；

（Ⅱ）已知数列 $\{a_n\}$ 的长度为 p 的递增子列的末项的最小值为 a_{m_0}，长度为 q 的递增子列的末项的最小值为 a_{n_0}．若 $p<q$，求证：$a_{m_0}<a_{n_0}$；

（Ⅲ）设无穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数，且任意两项均不相等．若 $\{a_n\}$ 的长度为 s 的递增子列末项的最小值为 $2s-1$，且长度为 s 末项为 $2s-1$ 的递增子列恰有 2^{s-1} 个（$s=1$，2，…），求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．