2018 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学试题参考答案（北京卷）

一、选择题

（1）A　　（2）D　　（3）B　　（4）D

（5）C　　（6）C　　（7）C　　（8）D

二、填空题

（9）$a_n=6n-3$　　（10）$1+\sqrt{2}$　　（11）$\dfrac{2}{3}$　　（12）3

（13）$f(x)=\sin x$（答案不唯一）　　（14）$\sqrt{3}-1$　2

三、解答题

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）在△ABC 中，∵$\cos B=-\dfrac{1}{7}$，∴$B\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，∴$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

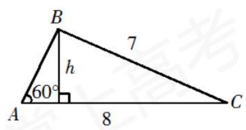
由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}\Rightarrow\dfrac{7}{\sin A}=\dfrac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$，∴$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

∵$B\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，∴$A\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，∴$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$.

（Ⅱ）在△ABC 中，∵$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times(-\dfrac{1}{7})+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{7}=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.

如图所示，在△ABC 中，∵$\sin C=\dfrac{h}{BC}$，∴$h=BC\cdot\sin C=7\times\dfrac{3\sqrt{3}}{14}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

∴AC 边上的高为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.



（16）（共 14 分）

解：（Ⅰ）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

∵$CC_1\perp$ 平面 ABC，

∴四边形 A_1ACC_1 为矩形.

又 E，F 分别为 AC，A_1C_1 的中点，

∴$AC\perp EF$.

∵$AB=BC$.

∴$AC\perp BE$，

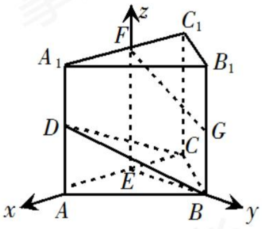
∴$AC\perp$平面 BEF.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $AC\perp EF$，$AC\perp BE$，$EF/\!/CC_1$.

又 $CC_1\perp$平面 ABC，∴$EF\perp$平面 ABC.

∵$BE\subset$平面 ABC，∴$EF\perp BE$.

如图建立空间直角坐标系 $E\text{-}xyz$.



由题意得 B（0，2，0），C（−1，0，0），D（1，0，1），F（0，0，2），G（0，2，1）.

∴ $\overrightarrow{CD}=(2,0,1)$，$\overrightarrow{CB}=(1,2,0)$，

设平面 BCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

∴ $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$，∴ $\begin{cases}2a+c=0\\ a+2b=0\end{cases}$，

令 $a=2$，则 $b=-1$，$c=-4$，

∴平面 BCD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(2,-1,-4)$，

又∵平面 CDC_1 的法向量为 $\overrightarrow{EB}=(0,2,0)$，

∴ $\cos<\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}>=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{EB}|}=-\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

由图可得二面角 $B\text{-}CD\text{-}C_1$ 为钝角，所以二面角 $B\text{-}CD\text{-}C_1$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

（Ⅲ）由（Ⅱ）知平面 BCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-1,-4)$，∵G（0，2，1），F（0，0，2），

∴ $\overrightarrow{GF}=(0,-2,1)$，∴ $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{GF}=-2$，∴ $\boldsymbol{n}$ 与 $\overrightarrow{GF}$ 不垂直，

∴GF 与平面 BCD 不平行且不在平面 BCD 内，∴GF 与平面 BCD 相交.

（17）（共 12 分）

解：（Ⅰ）由题意知，样本中电影的总部数是 140+50+300+200+800+510=2000，

第四类电影中获得好评的电影部数是 200×0.25=50.

故所求概率为 $\frac{50}{2000}=0.025$

（Ⅱ）设事件 A 为“从第四类电影中随机选出的电影获得好评”，

事件 B 为“从第五类电影中随机选出的电影获得好评”．

故所求概率为 P（$A\overline{B}+\overline{A}B$）$=P$（$A\overline{B}$）$+P$（$\overline{A}B$）

$=P$（A）(1–P（B）) + (1–P（A）) P（B）.

由题意知：P（A）估计为 0.25，P（B）估计为 0.2.

故所求概率估计为 0.25×0.8+0.75×0.2=0.35.

（Ⅲ）$D\xi_1>D\xi_4>D\xi_2=D\xi_5>D\xi_3>D\xi_6$.

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x$，

所以 $f'(x)=[2ax-(4a+1)]e^x+[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x$

$=[ax^2-(2a+1)x+2]e^x$.

$f'(1)=(1-a)e$.

由题设知 $f'(1)=0$，即 $(1-a)e=0$，解得 $a=1$.

此时 $f(1)=3e\neq0$.

所以 a 的值为 1.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f'(x)=[ax^2-(2a+1)x+2]e^x=(ax-1)(x-2)e^x$.

若 $a>\frac{1}{2}$，则当 $x\in(\frac{1}{a}，2)$时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(2，+\infty)$时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$在 $x=2$ 处取得极小值.

若 $a\leq\frac{1}{2}$，则当 $x\in(0，2)$时，$x-2<0$，$ax-1\leq\frac{1}{2}x-1<0$，

所以 $f'(x)>0$.

所以 2 不是 $f(x)$的极小值点.

综上可知，a 的取值范围是（$\frac{1}{2}$，$+\infty$）.

（19）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为抛物线 $y^2=2px$ 经过点 P（1，2），

所以 $4=2p$，解得 $p=2$，所以抛物线的方程为 $y^2=4x$.

由题意可知直线 l 的斜率存在且不为 0，

设直线 l 的方程为 $y=kx+1$（$k\neq 0$）.

由 $\begin{cases} y^2=4x \\ y=kx+1 \end{cases}$ 得 $k^2x^2+(2k-4)x+1=0$.

依题意 $\Delta=(2k-4)^2-4\times k^2\times 1>0$，解得 $k<0$ 或 $0<k<1$.

又 PA，PB 与 y 轴相交，故直线 l 不过点（1，−2）．从而 $k\neq -3$.

所以直线 l 斜率的取值范围是（−∞，−3）∪（−3，0）∪（0，1）.

（Ⅱ）设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）.

由（I）知 $x_1+x_2=-\dfrac{2k-4}{k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{k^2}$.

直线 PA 的方程为 $y-2=\dfrac{y_1-2}{x_1-1}(x-1)$.

令 $x=0$，得点 M 的纵坐标为 $y_M=\dfrac{-y_1+2}{x_1-1}+2=\dfrac{-kx_1+1}{x_1-1}+2$.

同理得点 N 的纵坐标为 $y_N=\dfrac{-kx_2+1}{x_2-1}+2$.

由 $\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO}$，$\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QO}$ 得 $\lambda=1-y_M$，$\mu=1-y_N$.

所　　　　以

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{1-y_M}+\frac{1}{1-y_N}=\frac{x_1-1}{(k-1)x_1}+\frac{x_2-1}{(k-1)x_2}=\frac{1}{k-1}\cdot\frac{2x_1x_2-(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{1}{k-1}\cdot\frac{\frac{2}{k^2}+\frac{2k-4}{k^2}}{\frac{1}{k^2}}=2$$

.

所以 $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}$ 为定值.

（20）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为α=（1，1，0），β=（0，1，1），所以

$M(\alpha，\alpha)=\dfrac{1}{2}[(1+1-|1-1|)+(1+1-|1-1|)+(0+0-|0-0|)]=2$，

$M(\alpha，\beta)=\dfrac{1}{2}[(1+0-|1-0|)+(1+1-|1-1|)+(0+1-|0-1|)]=1$.

（Ⅱ）设α=（x_1，x_2，x_3，x_4）∈B，则 $M(\alpha，\alpha)=x_1+x_2+x_3+x_4$.

由题意知 x_1，x_2，x_3，$x_4\in\{0，1\}$，且 $M(\alpha，\alpha)$为奇数，

所以 x_1，x_2，x_3，x_4 中 1 的个数为 1 或 3.

所以 $B\subseteq\{(1，0，0，0)，(0，1，0，0)，(0，0，1，0)，(0，0，0，1)，(0，1，1，1)，(1，0，1，1)，(1，1，0，1)，(1，1，1，0)\}$.

将上述集合中的元素分成如下四组：

$(1，0，0，0)，(1，1，1，0)$；$(0，1，0，0)，(1，1，0，1)$；$(0，0，1，0)，(1，0，1，1)$；$(0，0，0，1)，(0，1，1，1)$.

经验证，对于每组中两个元素 α，β，均有 $M(\alpha，\beta)=1$.

所以每组中的两个元素不可能同时是集合 B 的元素.

所以集合 B 中元素的个数不超过 4.

又集合$\{(1，0，0，0)，(0，1，0，0)，(0，0，1，0)，(0，0，0，1)\}$满足条件，

所以集合 B 中元素个数的最大值为 4.

（Ⅲ）设 $S_k=\{(x_1，x_2，\cdots，x_n)\mid(x_1，x_2，\cdots，x_n)\in A，x_k=1，x_1=x_2=\cdots=x_{k-1}=0)\}$（$k=1，2，\cdots，n$)，

$S_{n+1}=\{(x_1，x_2，\cdots，x_n)\mid x_1=x_2=\cdots=x_n=0\}$，

则 $A=S_1\cup S_1\cup\cdots\cup S_{n+1}$.

对于 S_k（$k=1，2，\cdots，n-1$）中的不同元素 α，β，经验证，$M(\alpha，\beta)\geq1$.

所以 S_k（$k=1，2，\cdots，n-1$）中的两个元素不可能同时是集合 B 的元素.

所以 B 中元素的个数不超过 $n+1$.

取 $e_k=(x_1，x_2，\cdots，x_n)\in S_k$ 且 $x_{k+1}=\cdots=x_n=0$（$k=1，2，\cdots，n-1$）.

令 $B=(e_1，e_2，\cdots，e_{n-1})\cup S_n\cup S_{n+1}$，则集合 B 的元素个数为 $n+1$，且满足条件.

故 B 是一个满足条件且元素个数最多的集合