2021 年浙江省高考数学试题 答案解析

一、选择题

1. D

解析:

由交集的定义结合题意可得: $A\cap B=\{x\,|\,1\le x<2\}$.

故选 D.

2. C

解析:

$(1+ai)i=i+ai^2=i-a=-a+i=3+i$,

利用复数相等的充分必要条件可得: $-a=3,\therefore a=-3$.

故选 C.

3. B

解析:

如图所示, $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c},\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$,当 $AB\perp OC$ 时, $\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 垂直,

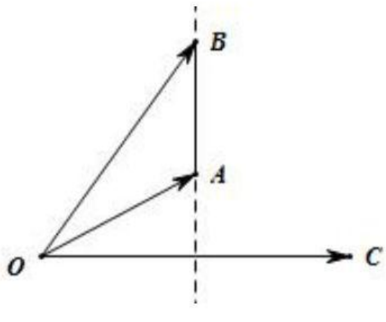
$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=0$, 所以$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$成立, 此时$\vec{a}\ne\vec{b}$,

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$不是$\vec{a}=\vec{b}$的充分条件,

当$\vec{a}=\vec{b}$时, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$, $\therefore(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{0}\cdot\vec{c}=0$, $\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$成立,

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$是$\vec{a}=\vec{b}$的必要条件,

综上, “$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$”是“$\vec{a}=\vec{b}$”的必要不充分条件



故选 B.

4. A

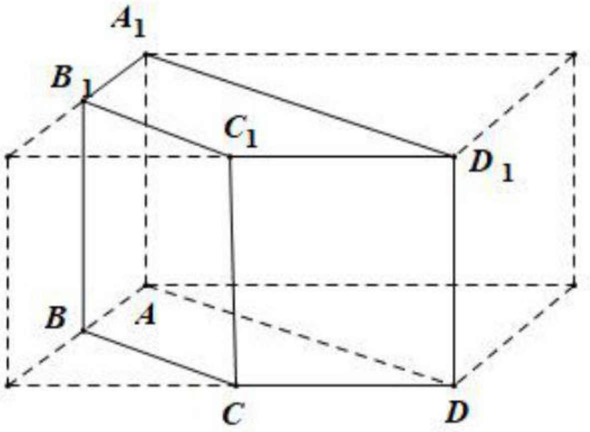
解析：

几何体为如图所示的四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，其高为 1，底面为等腰梯形 $ABCD$，

该等腰梯形的上底为 $\sqrt{2}$，下底为 $2\sqrt{2}$，腰长为 1，故梯形的高为 $\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故 $V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1=\frac{3}{2}$，

故选 A.

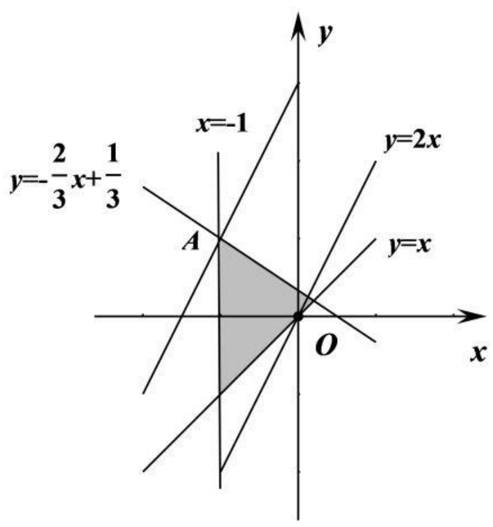


5. B

解析：

画出满足约束条件 $\begin{cases}x+1\geq 0\\ x-y\leq 0\\ 2x+3y-1\leq 0\end{cases}$ 的可行域,

如下图所示：



目标函数$z=x-\frac{1}{2}y$化为$y=2x-2z$,

由$\begin{cases}x=-1\\2x+3y-1=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$，设$A(-1,1)$,

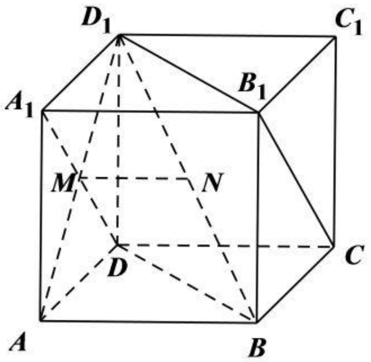
当直线$y=2x-2z$过A点时,

$z=x-\frac{1}{2}y$取得最小值为$-\frac{3}{2}$.

故选B

6. A

解析:



连AD_1，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,

M是A_1D的中点，所以M为AD_1中点,

又N是D_1B的中点，所以$MN//AB$,

$MN\not\subset$平面$ABCD, AB\subset$平面$ABCD$,

所以$MN//$平面$ABCD$.

因为AB不垂直BD，所以MN不垂直BD

则MN不垂直平面BDD_1B_1，所以选项B,D不正确;

在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AD_1\perp A_1D$,

$AB\perp$平面AA_1D_1D，所以$AB\perp A_1D$,

$AD_1\cap AB=A$，所以$A_1D\perp$平面ABD_1,

$D_1B\subset$平面ABD_1，所以$A_1D\perp D_1B$,

且直线 A_1D, D_1B 是异面直线，

所以选项 C 错误，选项 A 正确.

故选 A.

7. D

解析：

对于 A，$y=f(x)+g(x)-\frac{1}{4}=x^2+\sin x$，该函数为非奇非偶函数，与函数图象不符，排除 A；

对于 B，$y=f(x)-g(x)-\frac{1}{4}=x^2-\sin x$，该函数为非奇非偶函数，与函数图象不符，排除 B；

对于 C，$y=f(x)g(x)=\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\sin x$，则 $y'=2x\sin x+\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\cos x$，

当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$y'=\frac{\pi}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}>0$，与图象不符，排除 C.

故选 D.

8. C

解析：

法 1：由基本不等式有 $\sin\alpha\cos\beta\le\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\beta}{2}$，

同理 $\sin\beta\cos\gamma\le\frac{\sin^2\beta+\cos^2\gamma}{2}$，$\sin\gamma\cos\alpha\le\frac{\sin^2\gamma+\cos^2\alpha}{2}$，

故 $\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\le\frac{3}{2}$，

故 $\sin\alpha\cos\beta,\sin\beta\cos\gamma,\sin\gamma\cos\alpha$ 不可能均大于 $\frac{1}{2}$.

取 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，$\beta=\frac{\pi}{3}$，$\gamma=\frac{\pi}{4}$，

则 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{4}<\frac{1}{2},\sin\beta\cos\gamma=\frac{\sqrt{6}}{4}>\frac{1}{2},\sin\gamma\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{4}>\frac{1}{2}$，

故三式中大于 $\frac{1}{2}$ 的个数的最大值为 2，

故选：C.

法 2：不妨设 $\alpha<\beta<\gamma$，则 $\cos\alpha>\cos\beta>\cos\gamma,\sin\alpha<\sin\beta<\sin\gamma$，

由排列不等式可得：

$\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\le\sin\alpha\cos\gamma+\sin\beta\cos\beta+\sin\gamma\cos\alpha$，

而 $\sin\alpha\cos\gamma+\sin\beta\cos\beta+\sin\gamma\cos\alpha=\sin\left(\gamma+\alpha\right)+\dfrac{1}{2}\sin2\beta\le\dfrac{3}{2}$，

故 $\sin\alpha\cos\beta,\sin\beta\cos\gamma,\sin\gamma\cos\alpha$ 不可能均大于 $\dfrac{1}{2}$.

取 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$， $\beta=\dfrac{\pi}{3}$， $\gamma=\dfrac{\pi}{4}$，

则 $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{2},\sin\beta\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{6}}{4}>\dfrac{1}{2},\sin\gamma\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{4}>\dfrac{1}{2}$，

故三式中大于 $\dfrac{1}{2}$ 的个数的最大值为 2,

故选 C.

9. C

解析:

由题意得 $f(s-t)f(s+t)=[f(s)]^2$，即 $\left[a(s-t)^2+b\right]\left[a(s+t)^2+b\right]=\left(as^2+b\right)^2$，

对其进行整理变形：

$\left(as^2+at^2-2ast+b\right)\left(as^2+at^2+2ast+b\right)=\left(as^2+b\right)^2$，

$\left(as^2+at^2+b\right)^2-(2ast)^2-\left(as^2+b\right)^2=0$，

$\left(2as^2+at^2+2b\right)at^2-4a^2s^2t^2=0$，

$-2a^2s^2t^2+a^2t^4+2abt^2=0$，

所以 $-2as^2+at^2+2b=0$ 或 $t=0$，

其中 $\dfrac{s^2}{\frac{b}{a}}-\dfrac{t^2}{\frac{2b}{a}}=1$ 为双曲线， $t=0$ 为直线.

故选 C.

10. A

解析:

因为$a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$，所以$a_n>0$，$S_{100}>\dfrac{1}{2}$.

由$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}} \Rightarrow \dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

$\therefore \dfrac{1}{a_{n+1}}<\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}+\dfrac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}<\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}+\dfrac{1}{2}$ ，即$\dfrac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}-\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}<\dfrac{1}{2}$

根据累加法可得，$\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}\le 1+\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{n+1}{2}$，当且仅当$n=1$时取等号，

$\therefore a_n \ge \dfrac{4}{(n+1)^2}$ $\therefore a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\le \dfrac{a_n}{1+\dfrac{2}{n+1}}=\dfrac{n+1}{n+3}a_n$

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le \dfrac{n+1}{n+3}$,

由累乘法可得$a_n \le \dfrac{6}{(n+1)(n+2)}$，当且仅当$n=1$时取等号，

由裂项求和法得：

所以$S_{100}\le 6\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{101}-\dfrac{1}{102}\right)=6\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{102}\right)<3$，即$\dfrac{1}{2}<S_{100}<3$.

故选 A.

二、填空题

11.

答案： 25

解析：

由题意可得，大正方形的边长为：$a=\sqrt{3^2+4^3}=5$，

则其面积为：$S_1=5^2=25$，

小正方形的面积：$S_2=25-4\times\left(\dfrac{1}{2}\times 3\times 4\right)=1$，

从而$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{25}{1}=25$.

故答案为 25.

12.

答案： 2

解析：

$f\left[f\left(\sqrt{6}\right)\right]=f\left(6-4\right)=f\left(2\right)=\left|2-3\right|+a=3$，故 $a=2$，

故答案为 2.

13.

答案： (1). 5； (2). 10.

解析：

$(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$，

$(x+1)^4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$，

所以 $a_1=1+4=5, a_2=-3+6=3$，

$a_3=3+4=7, a_4=-1+1=0$，

所以 $a_2+a_3+a_4=10$.

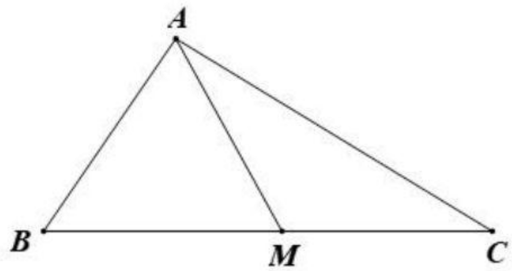
故答案为：$5,10$.

14.

答案： (1). $2\sqrt{13}$ (2). $\frac{2\sqrt{39}}{13}$

解析：

由题意作出图形，如图，



在 $\triangle ABM$ 中，由余弦定理得 $AM^2=AB^2+BM^2-2BM\cdot BA\cdot\cos B$，

即 $12=4+BM^2-2BM\times2\times\frac{1}{2}$，解得 $BM=4$（负值舍去），

所以 $BC=2BM=2CM=8$，

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 4 + 64 - 2 \times 2 \times 8 \times \frac{1}{2} = 52,$$

所以$AC = 2\sqrt{13}$；

在$\triangle AMC$中，由余弦定理得

$$\cos \angle MAC = \frac{AC^2 + AM^2 - MC^2}{2AM \cdot AC} = \frac{52 + 12 - 16}{2 \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

故答案为：$2\sqrt{13}$；$\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

15.

答案： (1). 1 (2). $\frac{8}{9}$

解析：

$$P(\xi = 2) = \frac{C_4^2}{C_{m+n+4}^2} = \frac{6}{C_{m+n+4}^2} = \frac{1}{6} \Rightarrow C_{m+n+4}^2 = 36，所以 m + n + 4 = 9,$$

$$P(一红一黄) = \frac{C_4^1 \cdot C_m^1}{C_{m+n+4}^2} = \frac{4m}{36} = \frac{m}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow m = 3，所以 n = 2，则 m - n = 1.$$

由于$P(\xi = 2) = \frac{1}{6}, P(\xi = 1) = \frac{C_4^1 \cdot C_5^1}{C_9^2} = \frac{4 \times 5}{36} = \frac{5}{9}, P(\xi = 0) = \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

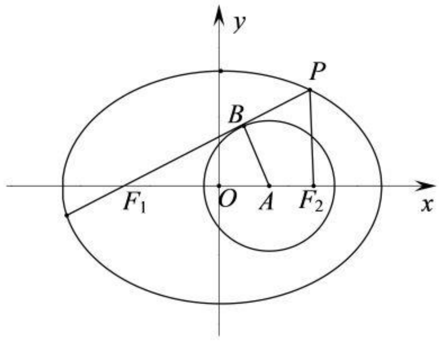
$$\therefore E(\xi) = \frac{1}{6} \times 2 + \frac{5}{9} \times 1 + \frac{5}{18} \times 0 = \frac{1}{3} + \frac{5}{9} = \frac{8}{9}.$$

故答案为：1；$\frac{8}{9}$.

16.

答案： (1). $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (2). $\frac{\sqrt{5}}{5}$

解析：



如图所示：不妨假设$c=2$，设切点为B，

$$\sin\angle PF_1F_2=\sin\angle BF_1A=\frac{|AB|}{|F_1A|}=\frac{2}{3},\quad \tan\angle PF_1F_2=\frac{2}{\sqrt{3^2-2^2}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$$

所以$k=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，由$k=\frac{|PF_2|}{|F_1F_2|},|F_1F_2|=2c=4$，所以$|PF_2|=\frac{8\sqrt{5}}{5}$，

$$|PF_1|=|PF_2|\times\frac{1}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{12\sqrt{5}}{5},$$

于是$2a=|PF_1|+|PF_2|=4\sqrt{5}$，即$a=2\sqrt{5}$，所以$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$\frac{2\sqrt{5}}{5}$；$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

17.

答案： $\frac{2}{5}$

解析：

由题意，设$\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(0,2),\vec{c}=(m,n)$，

则$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=m-2n=0$，即$m=2n$，

又向量$\vec{d}$在$\vec{a},\vec{b}$方向上的投影分别为x，y，所以$\vec{d}=\left(x,y\right)$，

所以$\vec{d}-\vec{a}$在$\vec{c}$方向上的投影$z=\frac{(\vec{d}-\vec{a})\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|}=\frac{m\left(x-1\right)+ny}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{2x-2+y}{\pm\sqrt{5}}$，

即$2x+y\mp\sqrt{5}z=2$，

所以$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{10}\left[2^2+1^2+\left(\pm\sqrt{5}\right)^2\right]\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq\frac{1}{10}\left(2x+y\mp\sqrt{5}z\right)^2=\frac{2}{5}$，

当且仅当$\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{\mp\sqrt{5}}\\2x+y\mp\sqrt{5}z=2\end{cases}$即$\begin{cases}x=\dfrac{2}{5}\\y=\dfrac{1}{5}\\z=\mp\dfrac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$时，等号成立，

所以$x^2+y^2+z^2$的最小值为$\dfrac{2}{5}$.

故答案为：$\dfrac{2}{5}$.

三、解答题

18.

答案：（1）π；（2）$1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

解析：

（1）由辅助角公式得$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,

则

$$y=\left[f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2=\left[\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)\right]^2=2\sin^2\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=1-\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)=1-\sin 2x$$

,

所以该函数的最小正周期$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$;

（2）由题意，$y=f(x)f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{2}\sin x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin x$

$$=2\sin x\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x\cos x$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2},$$

由$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$可得$2x-\dfrac{\pi}{4}\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$,

所以当$2x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$即$x=\dfrac{3\pi}{8}$时，函数取最大值$1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

19.

答案：（1）证明见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{15}}{6}$.

解析：

（1）在$\triangle DCM$中，$DC=1$，$CM=2$，$\angle DCM=60^\circ$，由余弦定理可得$DM=\sqrt{3}$，

所以$DM^2+DC^2=CM^2$，$\therefore DM\perp DC$．由题意$DC\perp PD$且$PD\cap DM=D$，$\therefore DC\perp$平面PDM，而$PM\subset$平面PDM，所以$DC\perp PM$，又$AB//DC$，所以$AB\perp PM$．

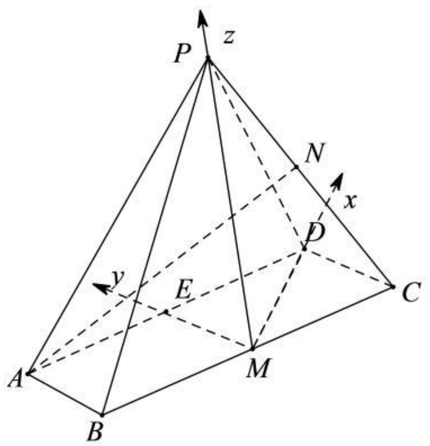
（2）由$PM\perp MD$，$AB\perp PM$，而AB与DM相交，所以$PM\perp$平面$ABCD$，因为$AM=\sqrt{7}$，所以$PM=2\sqrt{2}$，取AD中点E，连接ME，则ME,DM,PM两两垂直，以点M为坐标原点，如图所示，建立空间直角坐标系，

则$A(-\sqrt{3},2,0),P(0,0,2\sqrt{2}),D(\sqrt{3},0,0),M(0,0,0),C(\sqrt{3},-1,0)$

又N为PC中点，所以$N\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},\sqrt{2}\right),\overrightarrow{AN}=\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{5}{2},\sqrt{2}\right)$.

由（1）得$CD\perp$平面PDM，所以平面PDM的一个法向量$\vec{n}=(0,1,0)$

从而直线AN与平面PDM所成角的正弦值为$\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{AN}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AN}||\vec{n}|}=\dfrac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{25}{4}+2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$.



20.

答案：（1）$a_n=-3\cdot(\dfrac{3}{4})^n$；（2）$-3\le\lambda\le1$.

解析:

（1）当 $n=1$ 时，$4(a_1+a_2)=3a_1-9$，

$4a_2=\frac{9}{4}-9=-\frac{27}{4},\therefore a_2=-\frac{27}{16}$,

当 $n\geq 2$ 时，由 $4S_{n+1}=3S_n-9$ ①,

得 $4S_n=3S_{n-1}-9$ ②，①−②得 $4a_{n+1}=3a_n$

$a_2=-\frac{27}{16}\neq 0,\therefore a_n\neq 0,\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{4}$,

又 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{4},\therefore \{a_n\}$ 是首项为 $-\frac{9}{4}$，公比为 $\frac{3}{4}$ 的等比数列,

$\therefore a_n=-\frac{9}{4}\cdot(\frac{3}{4})^{n-1}=-3\cdot(\frac{3}{4})^n$；

（2）由 $3b_n+(n-4)a_n=0$，得 $b_n=-\frac{n-4}{3}a_n=(n-4)(\frac{3}{4})^n$，

所以 $T_n=-3\times\frac{3}{4}-2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-1\times\left(\frac{3}{4}\right)^3+0\times\left(\frac{3}{4}\right)^4+\cdots+(n-4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$，

$\frac{3}{4}T_n=-3\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-2\times\left(\frac{3}{4}\right)^3-1\times\left(\frac{3}{4}\right)^4+\cdots+(n-5)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+(n-4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$，

两式相减得 $\frac{1}{4}T_n=-3\times\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^4+\cdots\left(\frac{3}{4}\right)^n-(n-4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$$=-\frac{9}{4}+\frac{\frac{9}{16}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{3}{4}}-(n-4)\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$=-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}-4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-(n-4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}=-n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1},$$

所以 $T_n=-4n\cdot(\frac{3}{4})^{n+1}$,

由 $T_n\leq\lambda b_n$ 得 $-4n\cdot(\frac{3}{4})^{n+1}\leq\lambda(n-4)\cdot(\frac{3}{4})^n$ 恒成立,

即 $\lambda(n-4)+3n\geq 0$ 恒成立,

$n=4$ 时不等式恒成立;

$n<4$时，$\lambda \le -\dfrac{3n}{n-4} = -3-\dfrac{12}{n-4}$，得$\lambda \le 1$；

$n>4$时，$\lambda \ge -\dfrac{3n}{n-4} = -3-\dfrac{12}{n-4}$，得$\lambda \ge -3$；

所以$-3 \le \lambda \le 1$.

21.

答案：(1) $y^2=4x$；(2) $\left(-\infty,-7-4\sqrt{3}\right]\cup\left[-7+4\sqrt{3},1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

解析：

(1) 因为$|MF|=2$，故$p=2$，故抛物线的方程为：$y^2=4x$.

(2) 设$AB: x=ty+1$，$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，$N\left(n,0\right)$，

所以直线$l: x=\dfrac{y}{2}+n$，由题设可得$n\ne 1$且$t\ne\dfrac{1}{2}$.

由$\begin{cases}x=ty+1\\ y^2=4x\end{cases}$可得$y^2-4ty-4=0$，故$y_1y_2=-4, y_1+y_2=4t$，

因为$|RN|^2=|PN|\cdot|QN|$，故$\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}|y_R|\right)^2=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}|y_P|\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}|y_Q|$，故$y_R^2=|y_P|\cdot|y_Q|$.

又$MA: y=\dfrac{y_1}{x_1+1}\left(x+1\right)$，由$\begin{cases}y=\dfrac{y_1}{x_1+1}\left(x+1\right)\\ x=\dfrac{y}{2}+n\end{cases}$可得$y_P=\dfrac{2\left(n+1\right)y_1}{2x_1+2-y_1}$，

同理$y_Q=\dfrac{2\left(n+1\right)y_2}{2x_2+2-y_2}$，

由$\begin{cases}x=ty+1\\ x=\dfrac{y}{2}+n\end{cases}$可得$y_R=\dfrac{2\left(n-1\right)}{2t-1}$，

所以$\left[\dfrac{2\left(n-1\right)}{2t-1}\right]^2=\left|\dfrac{2\left(n+1\right)y_2}{2x_2+2-y_2}\times\dfrac{2\left(n+1\right)y_1}{2x_1+2-y_1}\right|$，

整理得到$\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^2=\left(2t-1\right)^2\left|\dfrac{y_1y_2}{\left(2x_2+2-y_2\right)\left(2x_1+2-y_1\right)}\right|$，

$$=\frac{4\left(2t-1\right)^2}{\left|\left(\frac{y_2^2}{2}+2-y_2\right)\left(\frac{y_1^2}{2}+2-y_1\right)\right|}$$

$$=\frac{4\left(2t-1\right)^2}{\left|\frac{y_2^2y_1^2}{4}+\left(y_2+y_1\right)^2-y_2y_1-\frac{y_2+y_1}{2}\times y_1y_2-2\left(y_2+y_1\right)+4\right|}=\frac{\left(2t-1\right)^2}{3+4t^2}$$

故$\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2=\frac{3+4t^2}{\left(2t-1\right)^2}$，

令$s=2t-1$，则$t=\frac{s+1}{2}$且$s\neq 0$，

故$\frac{3+4t^2}{\left(2t-1\right)^2}=\frac{s^2+2s+4}{s^2}=1+\frac{2}{s}+\frac{4}{s^2}=4\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$，

故$\begin{cases}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2\geq\frac{3}{4}\\ n\neq 1\end{cases}$即$\begin{cases}n^2+14n+1\geq 0\\ n\neq 1\end{cases}$，

解得$n\leq -7-4\sqrt{3}$或$-7+4\sqrt{3}\leq n<1$或$n>1$.

故直线l在x轴上的截距的范围为$n\leq -7-4\sqrt{3}$或$-7+4\sqrt{3}\leq n<1$或$n>1$.

22.

答案: (1)$b\leq 0$时，$f(x)$在R上单调递增；$b>0$时，函数的单调减区间为$\left(-\infty,\log_a\frac{b}{\ln a}\right)$，

单调增区间为$\left(\log_a\frac{b}{\ln a},+\infty\right)$；

(2)$\left(1,e^2\right]$；

(3)证明见解析.

解析:

(1) $f(x)=a^x-bx+e^2$, $f'(x)=a^x\ln a-b$,

①若$b\leq 0$，则$f'(x)=a^x\ln a-b\geq 0$，所以$f(x)$在R上单调递增；

②若$b>0$，

当$x\in\left(-\infty,\log_a\frac{b}{\ln a}\right)$时，$f'\left(x\right)<0, f\left(x\right)$单调递减，

当$x\in\left(\log_a\frac{b}{\ln a},+\infty\right)$时，$f'\left(x\right)>0,f\left(x\right)$单调递增.

综上可得，$b\le 0$时，$f(x)$在R上单调递增；

$b>0$时，函数的单调减区间为$\left(-\infty,\log_a\frac{b}{\ln a}\right)$，单调增区间为$\left(\log_a\frac{b}{\ln a},+\infty\right)$.

(2) $f(x)$有 2 个不同零点$\Leftrightarrow a^x-bx+e^2=0$有 2 个不同解$\Leftrightarrow e^{x\ln a}-bx+e^2=0$有 2 个不同的解，

令$t=x\ln a$，则$e^t-\frac{bt}{\ln a}+e^2=0\Rightarrow\frac{b}{\ln a}=\frac{e^t+e^2}{t},t>0$，

记$g(t)=\frac{e^t+e^2}{t},g'(t)=\frac{e^t\cdot t-\left(e^t+e^2\right)}{t^2}=\frac{e^t(t-1)-e^2}{t^2}$，

记$h(t)=e^t(t-1)-e^2,h'(t)=e^t(t-1)+e^t\cdot 1=e^t\cdot t>0$，

又$h(2)=0$，所以$t\in(0,2)$时，$h(t)<0$，$t\in(2,+\infty)$时，$h(t)>0$，

则$g(t)$在$(0,2)$单调递减，$(2,+\infty)$单调递增，$\therefore\frac{b}{\ln a}>g(2)=e^2,\therefore\ln a<\frac{b}{e^2}$，

$\because b>2e^2,\therefore\frac{b}{e^2}>2,\therefore\ln a\le 2\Rightarrow 1<a\le e^2$.

即实数a的取值范围是$\left(1,e^2\right]$.

(3) $a=e,f(x)=e^x-bx+e^2$有 2 个不同零点，则$e^x+e^2=bx$，故函数的零点一定为正数.

由(2)可知有 2 个不同零点，记较大者为x_2，较小者为x_1，

$$b=\frac{e^{x_1}+e^2}{x_1}=\frac{e^{x_2}+e^2}{x_2}>e^4,$$

注意到函数$y=\frac{e^x+e^2}{x}$在区间$\left(0,2\right)$上单调递减，在区间$\left(2,+\infty\right)$上单调递增，

故$x_1<2<x_2$，又由$\frac{e^5+e^2}{5}<e^4$知$x_2>5$，

$$b=\frac{e^{x_1}+e^2}{x_1}<\frac{2e^2}{x_1}\Rightarrow x_1<\frac{2e^2}{b},$$

要证 $x_2 > \dfrac{b\ln b}{2e^2}x_1 + \dfrac{e^2}{b}$，只需 $x_2 > \ln b + \dfrac{e^2}{b}$，

$b = \dfrac{e^{x_2} + e^2}{x_2} < \dfrac{2e^{x_2}}{x_2}$ 且关于 b 的函数 $g\left(b\right) = \ln b + \dfrac{e^2}{b}$ 在 $b > e^4$ 上单调递增，

所以只需证 $x_2 > \ln\dfrac{2e^{x_2}}{x_2} + \dfrac{e^2 x_2}{2e^{x_2}}\left(x_2 > 5\right)$，

只需证 $\ln e^{x_2} - \ln\dfrac{2e^{x_2}}{x_2} - \dfrac{e^2 x_2}{2e^{x_2}} > 0$，

只需证 $\ln x - \dfrac{e^2 x}{2e^x} - \ln 2 > 0$，

$\because \dfrac{e^2}{2} < 4$，只需证 $h(x) = \ln x - \dfrac{4x}{e^x} - \ln 2$ 在 $x > 5$ 时为正，

由于 $h'(x) = \dfrac{1}{x} + 4xe^{-x} - 4e^{-x} = \dfrac{1}{x} + 4e^{-x}\left(x-1\right) > 0$，故函数 $h\left(x\right)$ 单调递增，

又 $h(5) = \ln 5 - \dfrac{20}{e^5} - \ln 2 = \ln\dfrac{5}{2} - \dfrac{20}{e^4} > 0$，故 $h(x) = \ln x - \dfrac{4x}{e^x} - \ln 2$ 在 $x > 5$ 时为正，

从而题中的不等式得证.