2022 年普通高等学校招生全国统一考试数学（天津卷）2022．06．

一、选择题：本题共 9 小题，每小题 5 分，共 45 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设全集 $U=\{-2,-1,0,1,2\}$，集合 $A=\{0,1,2\}$，B=$\{-1,2\}$，则 $A\cap\left(\complement_U B\right)=$（　　）

A. $\{0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{-1,1,2\}$　　D. $\{0,-1,1,2\}$

【答案】A

【解析】

【分析】先求出 $\complement_U B$，再根据交集的定义可求 $A\cap\left(\complement_U B\right)$.

【详解】$\complement_U B=\{-2,0,1\}$，故 $A\cap\left(\complement_U B\right)=\{0,1\}$，

故选：A.

2. “x 为整数”是“$2x+1$ 为整数”的（　　）

A. 充分不必要　　B. 必要不充分

C. 充分必要　　D. 既不充分也不必要

【答案】A

【解析】

【分析】依据充分不必要条件的定义去判定“x 为整数”与“$2x+1$ 为整数”的逻辑关系即可.

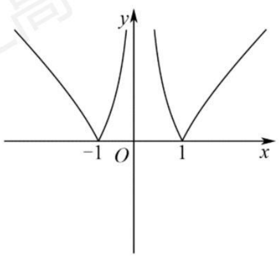
【详解】由题意，若 x 为整数，则 $2x+1$ 为整数，故充分性成立；

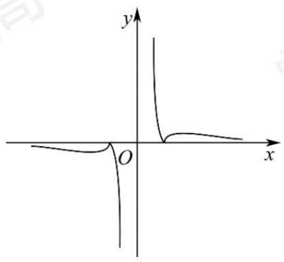
当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$2x+1$ 为整数，但 x 不为整数，故必要性不成立；

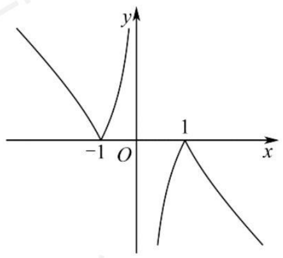
所以“x 为整数”是“$2x+1$ 为整数”的充分不必要条件.

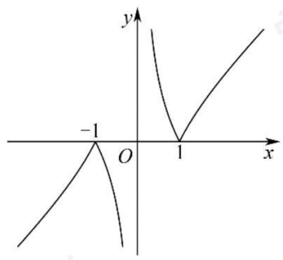
故选：A.

3. 函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x}$ 的图像为（　　）

A.


B.


C. 

D. 

【答案】D

【解析】

【分析】分析函数 $f\left(x\right)$ 的定义域、奇偶性、单调性及其在 $\left(-\infty,0\right)$ 上的函数值符号，结合排除法可得出合适的选项.

【详解】函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x}$ 的定义域为 $\left\{x\left|x\neq 0\right.\right\}$，

且 $f\left(-x\right)=\dfrac{\left|\left(-x\right)^2-1\right|}{-x}=-\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x}=-f\left(x\right)$，

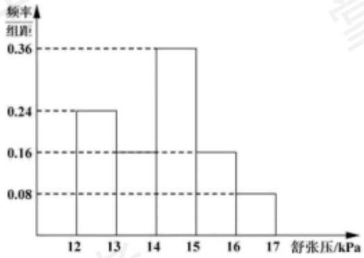
函数 $f\left(x\right)$ 为奇函数，A 选项错误；

又当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)=\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x}\leq 0$，C 选项错误；

当 $x>1$ 时，$f\left(x\right)=\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}=x-\dfrac{1}{x}$ 函数单调递增，故 B 选项错误；

故选：D

4. 为研究某药品的疗效，选取若干名志愿者进行临床试验，所有志愿者的舒张压数据（单位：kPa）的分组区间为 $[12,13),[13,14),[14,15),[15,16),[16,17]$，将其按从左到右的顺序分别编号为第一组，第二组，…，第五组，右图是根据试验数据制成的频率分布直方图．已知第一组与第二组共有 20 人，第三组中没有疗效的有 6 人，则第三组中有疗效的人数为（　　）



A. 8　　B. 12　　C. 16　　D. 18

【答案】B

【解析】

【分析】结合已知条件和频率分布直方图求出志愿者的总人数，进而求出第三组的总人数，从而可以求得结果.

【详解】志愿者的总人数为$\dfrac{20}{(0.24+0.16)\times 1}$＝50，

所以第三组人数为50×0.36＝18，

有疗效的人数为18－6＝12.

故选：B.

5. 已知$a=2^{0.7}$，$b=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{0.7}$，$c=\log_2\dfrac{1}{3}$，则（　　）

A. $a>c>b$　　B. $b>c>a$　　C. $a>b>c$　　D. $c>a>b$

【答案】C

【解析】

【分析】利用幂函数、对数函数的单调性结合中间值法可得出a、b、c的大小关系.

【详解】因为$2^{0.7}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{0.7}>0=\log_2 1>\log_2\dfrac{1}{3}$，故$a>b>c$.

故答案为：C.

6. 化简$\left(2\log_4 3+\log_8 3\right)\left(\log_3 2+\log_9 2\right)$的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 6

【答案】B

【解析】

【分析】根据对数的性质可求代数式的值.

【详解】原式$=(2\times\frac{1}{2}\log_2 3+\frac{1}{3}\log_2 3)(\log_3 2+\frac{1}{2}\log_3 2)$

$=\frac{4}{3}\log_2 3\times\frac{3}{2}\log_3 2=2$，

故选：B

7. 已知抛物线 $y^2=4\sqrt{5}x,F_1,F_2$ 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，抛物线的准线过双曲线的左焦点 F_1，与双曲线的渐近线交于点 A，若 $\angle F_1F_2A=\frac{\pi}{4}$，则双曲线的标准方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{10}-y^2=1$　　　　B. $x^2-\frac{y^2}{16}=1$

C. $x^2-\frac{y^2}{4}=1$　　　　D. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$

【答案】C

【解析】

【分析】由已知可得出 c 的值，求出点 A 的坐标，分析可得 $|AF_1|=|F_1F_2|$，由此可得出关于 a、b、c 的方程组，解出这三个量的值，即可得出双曲线的标准方程.

【详解】抛物线 $y^2=4\sqrt{5}x$ 的准线方程为 $x=-\sqrt{5}$，则 $c=\sqrt{5}$，则 $F_1\left(-\sqrt{5},0\right)$、$F_2\left(\sqrt{5},0\right)$，

不妨设点 A 为第二象限内的点，联立 $\begin{cases}y=-\frac{b}{a}x\\x=-c\end{cases}$，可得 $\begin{cases}x=-c\\y=\frac{bc}{a}\end{cases}$，即点 $A\left(-c,\frac{bc}{a}\right)$，

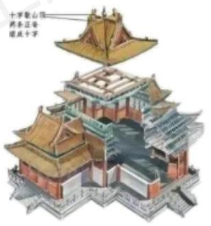
因为 $AF_1\perp F_1F_2$ 且 $\angle F_1F_2A=\frac{\pi}{4}$，则 $\triangle F_1F_2A$ 为等腰直角三角形，

且 $|AF_1|=|F_1F_2|$，即 $\frac{bc}{a}=2c$，可得 $\frac{b}{a}=2$，

所以，$\begin{cases}\frac{b}{a}=2\\c=\sqrt{5}\\c^2=a^2+b^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\b=2\\c=\sqrt{5}\end{cases}$，因此，双曲线的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$.

故选：C.

8. 如图，“十字歇山”是由两个直三棱柱重叠后的景象，重叠后的底面为正方形，直三棱柱的底面是顶角为 $120°$，腰为 3 的等腰三角形，则该几何体的体积为（　　）



十字歇山顶

A. 23　　B. 24　　C. 26　　D. 27

【答案】D

【解析】

【分析】作出几何体直观图，由题意结合几何体体积公式即可得组合体的体积.

【详解】该几何体由直三棱柱 $AFD-BHC$ 及直三棱柱 $DGC-AEB$ 组成，作 $HM\perp CB$ 于 M，如图，

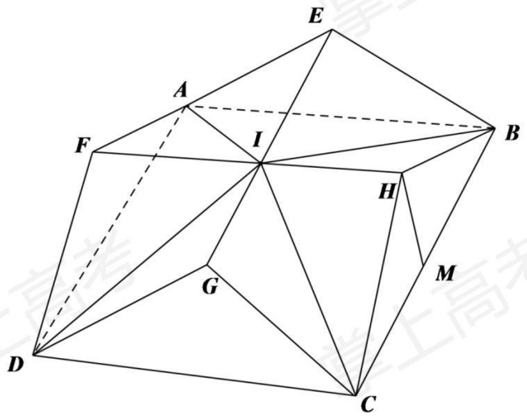
因为 $CH=BH=3,\angle CHB=120^\circ$，所以 $CM=BM=\dfrac{3\sqrt{3}}{2},HM=\dfrac{3}{2}$，

因为重叠后的底面为正方形，所以 $AB=BC=3\sqrt{3}$，

在直棱柱 $AFD-BHC$ 中，$AB\perp$ 平面 BHC，则 $AB\perp HM$，

由 $AB\cap BC=B$ 可得 $HM\perp$ 平面 $ADCB$，

设重叠后的 EG 与 FH 交点为 I，



则 $V_{I-BCDA}=\dfrac{1}{3}\times3\sqrt{3}\times3\sqrt{3}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{27}{2},V_{AFD-BHC}=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times\dfrac{3}{2}\times3\sqrt{3}=\dfrac{81}{4}$

则该几何体的体积为 $V=2V_{AFD-BHC}-V_{I-BCDA}=2\times\dfrac{81}{4}-\dfrac{27}{2}=27$.

故选：D.

9. 已知 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$，关于该函数有下列四个说法：

① $f(x)$ 的最小正周期为 2π；

② $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ 上单调递增；

③当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 时，$f(x)$ 的取值范围为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$；

④ $f(x)$ 的图象可由 $g(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度得到.

以上四个说法中，正确的个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】根据三角函数的图象与性质，以及变换法则即可判断各说法的真假.

【详解】因为 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，①不正确；

令 $t=2x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，而 $y=\frac{1}{2}\sin t$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上递增，所以 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ 上单调递增，②正确；因为 $t=2x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，$\sin t\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，所以 $f\left(x\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2}\right]$，③不正确；

由于 $g(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right]$，所以 $f(x)$ 的图象可由 $g(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度得到，④不正确.

故选：A.

第II卷

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．试题中包含两个空的，答对 1 个的给 3 分，全部答对的给 5 分．

10. 已知i是虚数单位，化简$\dfrac{11-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$的结果为______.

【答案】$1-5\mathrm{i}$ ## $-5\mathrm{i}+1$

【解析】

【分析】根据复数代数形式的运算法则即可解出.

【详解】$\dfrac{11-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{(11-3\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\dfrac{11-6-25\mathrm{i}}{5}=1-5\mathrm{i}$.

故答案为：$1-5\mathrm{i}$.

11. $\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)^5$的展开式中的常数项为______.

【答案】15

【解析】

【分析】由题意结合二项式定理可得$\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)^5$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_5^r\cdot 3^r\cdot x^{\frac{5-5r}{2}}$，令$\dfrac{5-5r}{2}=0$，代入即可得解.

【详解】由题意$\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)^5$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_5^r\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{5-r}\cdot\left(\dfrac{3}{x^2}\right)^r=C_5^r\cdot 3^r\cdot x^{\frac{5-5r}{2}}$，

令$\dfrac{5-5r}{2}=0$即$r=1$，则$C_5^r\cdot 3^r=C_5^1\cdot 3=15$，

所以$\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)^5$的展开式中的常数项为$15$.

故答案为：15.

【点睛】本题考查了二项式定理的应用，考查了运算求解能力，属于基础题.

12. 若直线$x-y+m=0\left(m>0\right)$与圆$\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=3$相交所得的弦长为$m$，则$m=$______.

【答案】2

【解析】

【分析】计算出圆心到直线的距离，利用勾股定理可得出关于m的等式，即可解得m的值.

【详解】圆$\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=3$的圆心坐标为$\left(1,1\right)$，半径为$\sqrt{3}$，

圆心到直线$x-y+m=0\left(m>0\right)$的距离为$\dfrac{\left|1-1+m\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{m}{\sqrt{2}}$，

由勾股定理可得$\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2=3$，因为$m>0$，解得$m=2$.

故答案为：2.

13. 52张扑克牌，没有大小王，无放回地抽取两次，则两次都抽到A的概率为__________；已知第一次抽到的是A，则第二次抽取A的概率为__________

【答案】 ①. $\frac{1}{221}$ ②. $\frac{1}{17}$

【解析】

【分析】由题意结合概率的乘法公式可得两次都抽到A的概率，再由条件概率的公式即可求得在第一次抽到A的条件下，第二次抽到A的概率.

【详解】由题意，设第一次抽到A的事件为B,第二次抽到A的事件为C,

则$P(BC)=\frac{4}{52}\times\frac{3}{51}=\frac{1}{221},P(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13},P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{221}}{\frac{1}{13}}=\frac{1}{17}$.

故答案为：$\frac{1}{221}$；$\frac{1}{17}$.

14. 在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{CA}=\vec{a},\overrightarrow{CB}=\vec{b}$，$D$是$AC$中点，$\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BE}$，试用$\vec{a},\vec{b}$表示$\overrightarrow{DE}$为__________，若$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DE}$，则$\angle ACB$的最大值为__________

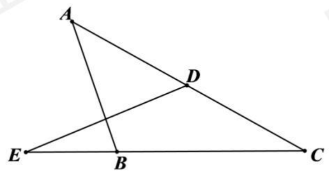
【答案】 ①. $\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$ ②. $\frac{\pi}{6}$

【解析】

【分析】法一：根据向量的减法以及向量的数乘即可表示出$\overrightarrow{DE}$，以$\left\{\vec{a},\vec{b}\right\}$为基底，表示出$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}$，由$AB\perp DE$可得$3\vec{b}^2+\vec{a}^2=4\vec{b}\cdot\vec{a}$，再根据向量夹角公式以及基本不等式即可求出.

法二：以点E为原点建立平面直角坐标系，设$E(0,0),B(1,0),C(3,0),A(x,y)$，由$AB\perp DE$可得点A的轨迹为以$M(-1,0)$为圆心，以$r=2$为半径的圆，方程为$(x+1)^2+y^2=4$，即可根据几何性质可知，当且仅当$CA$与$\odot M$相切时，$\angle C$最大，即求出.

【详解】方法一：



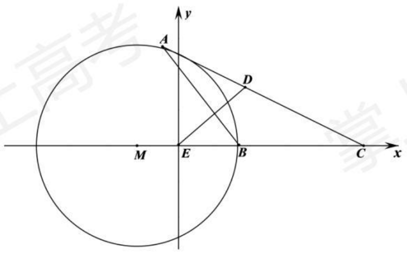
$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CD}=\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\vec{b}-\vec{a},\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DE}\Rightarrow(3\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$，

$3\vec{b}^2+\vec{a}^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow\cos\angle ACB=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3\vec{b}^2+\vec{a}^2}{4|\vec{a}||\vec{b}|}\ge\frac{2\sqrt{3}|\vec{a}||\vec{b}|}{4|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当$|\vec{a}|=\sqrt{3}|\vec{b}|$时取等号，而

$0<\angle ACB<\pi$，所以$\angle ACB\in(0,\frac{\pi}{6}]$.

故答案为：$\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$；$\frac{\pi}{6}$.

方法二：如图所示，建立坐标系：



$E(0,0),B(1,0),C(3,0),A(x,y)$，$\overrightarrow{DE}=(-\frac{x+3}{2},-\frac{y}{2}),\overrightarrow{AB}=(1-x,-y)$，

$\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow(\frac{x+3}{2})(x-1)+\frac{y^2}{2}=0\Rightarrow(x+1)^2+y^2=4$，所以点 A 的轨迹是以$M(-1,0)$为圆心，以$r=2$

为半径的圆，当且仅当CA与$\odot M$相切时，$\angle C$最大，此时$\sin C=\frac{r}{CM}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\angle C=\frac{\pi}{6}$.

故答案为：$\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$；$\frac{\pi}{6}$.

15. 设$a\in\mathbf{R}$，对任意实数 x，记$f(x)=\min\{|x|-2,x^2-ax+3a-5\}$．若$f(x)$至少有 3 个零点，则实数$a$的取值范围为______.

【答案】$a \geq 10$

【解析】

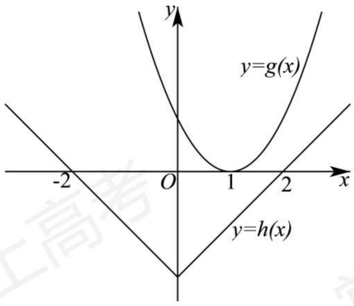
【分析】设 $g(x)=x^2-ax+3a-5$，$h(x)=|x|-2$，分析可知函数 $g(x)$ 至少有一个零点，可得出 $\Delta \geq 0$，求出 a 的取值范围，然后对实数 a 的取值范围进行分类讨论，根据题意可得出关于实数 a 的不等式，综合可求得实数 a 的取值范围.

【详解】设 $g(x)=x^2-ax+3a-5$，$h(x)=|x|-2$，由 $|x|-2=0$ 可得 $x=\pm 2$.

要使得函数 $f(x)$ 至少有3个零点，则函数 $g(x)$ 至少有一个零点，则 $\Delta=a^2-12a+20 \geq 0$，

解得 $a \leq 2$ 或 $a \geq 10$.

①当 $a=2$ 时，$g(x)=x^2-2x+1$，作出函数 $g(x)$、$h(x)$ 的图象如下图所示：



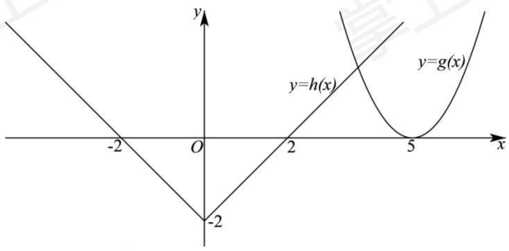
此时函数 $f(x)$ 只有两个零点，不合乎题意；

②当 $a<2$ 时，设函数 $g(x)$ 的两个零点分别为 x_1、x_2 $(x_1<x_2)$，

要使得函数 $f(x)$ 至少有3个零点，则 $x_2 \leq -2$，

所以，$\begin{cases} \dfrac{a}{2}<-2 \\ g(-2)=4+5a-5 \geq 0 \end{cases}$，解得 $a \in \varnothing$；

③当 $a=10$ 时，$g(x)=x^2-10x+25$，作出函数 $g(x)$、$h(x)$ 的图象如下图所示：



由图可知，函数$f\left(x\right)$的零点个数为3，合乎题意；

④当$a>10$时，设函数$g\left(x\right)$的两个零点分别为x_3、$x_4\left(x_3<x_4\right)$，

要使得函数$f\left(x\right)$至少有3个零点，则$x_3\geq 2$，

可得$\begin{cases}\dfrac{a}{2}>2\\ g\left(2\right)=4+a-5\geq 0\end{cases}$，解得$a>4$，此时$a>10$.

综上所述，实数a的取值范围是$\left[10,+\infty\right)$.

故答案为：$\left[10,+\infty\right)$.

【点睛】方法点睛：已知函数有零点（方程有根）求参数值（取值范围）常用的方法：

（1）直接法：直接求解方程得到方程的根，再通过解不等式确定参数范围；

（2）分离参数法：先将参数分离，转化成求函数的值域问题加以解决；

（3）数形结合法：先对解析式变形，进而构造两个函数，然后在同一平面直角坐标系中画出函数的图象，利用数形结合的方法求解.

三、解答题：本大题共5小题，共75分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16. 在$\triangle ABC$中，角A、B、C的对边分别为a，b，c.已知$a=\sqrt{6},b=2c,\cos A=-\dfrac{1}{4}$.

（1）求c的值；

（2）求$\sin B$的值；

（3）求$\sin(2A-B)$的值.

【答案】（1）$c=1$

（2）$\sin B=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

（3）$\sin(2A-B)=\frac{\sqrt{10}}{8}$

【解析】

【分析】（1）根据余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 以及 $b=2c$ 解方程组即可求出；

（2）由（1）可求出 $b=2$，再根据正弦定理即可解出；

（3）先根据二倍角公式求出 $\sin 2A,\cos 2A$，再根据两角差的正弦公式即可求出．

【小问 1 详解】

因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $6=b^2+c^2+\frac{1}{2}bc$，而 $b=2c$，代入得 $6=4c^2+c^2+c^2$，解得：$c=1$．

【小问 2 详解】

由（1）可求出 $b=2$，而 $0<A<\pi$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，又 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以

$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\times\frac{\sqrt{15}}{4}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$．

【小问 3 详解】

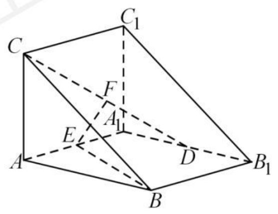
因为 $\cos A=-\frac{1}{4}$，所以 $\frac{\pi}{2}<A<\pi$，故 $0<B<\frac{\pi}{2}$，又 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{15}}{4}$， 所以

$\sin 2A=2\sin A\cos A=2\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{\sqrt{15}}{4}=-\frac{\sqrt{15}}{8}$，$\cos 2A=2\cos^2 A-1=2\times\frac{1}{16}-1=-\frac{7}{8}$，而

$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{4}$，所以 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

故 $\sin(2A-B)=\sin 2A\cos B-\cos 2A\sin B=\left(-\frac{\sqrt{15}}{8}\right)\times\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{7}{8}\times\frac{\sqrt{10}}{4}=\frac{\sqrt{10}}{8}$．

17. 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=AB=AC=2, AA_1\perp AB, AC\perp AB$，$D$ 为 A_1B_1 的中点，E 为 AA_1 的中点，F 为 CD 的中点．



（1）求证：$EF //$ 平面 ABC；

（2）求直线 BE 与平面 CC_1D 所成角的正弦值；

（3）求平面 A_1CD 与平面 CC_1D 所成二面角的余弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{4}{5}$

（3）$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

【解析】

【分析】（1）以点 A_1 为坐标原点，A_1A、A_1B_1、A_1C_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系，利用空间向量法可证得结论成立；

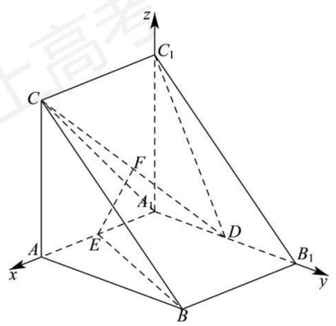
（2）利用空间向量法可求得直线 BE 与平面 CC_1D 夹角的正弦值；

（3）利用空间向量法可求得平面 A_1CD 与平面 CC_1D 夹角的余弦值.

【小问 1 详解】

证明：在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，且 $AC \perp AB$，则 $A_1C_1 \perp A_1B_1$

以点 A_1 为坐标原点，A_1A、A_1B_1、A_1C_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，



则 $A(2,0,0)$、$B(2,2,0)$、$C(2,0,2)$、$A_1(0,0,0)$、$B_1(0,0,2)$、$C_1(0,0,2)$、$D(0,1,0)$、$E(1,0,0)$、

$F\left(1,\frac{1}{2},1\right)$，则 $\overrightarrow{EF}=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$，

易知平面 ABC 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,0,0)$，则 $\overrightarrow{EF}\cdot\vec{m}=0$，故 $\overrightarrow{EF}\perp\vec{m}$，

$\because EF\not\subset$ 平面 ABC，故 $EF//$ 平面 ABC.

【小问 2 详解】

解：$\overrightarrow{C_1C}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{C_1D}=(0,1,-2)$，$\overrightarrow{EB}=(1,2,0)$，

设平面 CC_1D 的法向量为 $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\vec{u}\cdot\overrightarrow{C_1C}=2x_1=0\\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{C_1D}=y_1-2z_1=0\end{cases}$，

取 $y_1=2$，可得 $\vec{u}=(0,2,1)$，$\cos<\overrightarrow{EB},\vec{u}>=\frac{\overrightarrow{EB}\cdot\vec{u}}{\left|\overrightarrow{EB}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|}=\frac{4}{5}$.

因此，直线 BE 与平面 CC_1D 夹角的正弦值为 $\frac{4}{5}$.

【小问 3 详解】

解：$\overrightarrow{A_1C}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{A_1D}=(0,1,0)$，

设平面 A_1CD 的法向量为 $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\vec{v}\cdot\overrightarrow{A_1C}=2x_2+2z_2=0\\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{A_1D}=y_2=0\end{cases}$，

取 $x_2=1$，可得 $\vec{v}=(1,0,-1)$，则 $\cos<\vec{u},\vec{v}>=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=-\frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，

因此，平面 A_1CD 与平面 CC_1D 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

18. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，且 $a_1=b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=1$.

（1）求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$(S_{n+1}+a_{n+1})b_n=S_{n+1}b_{n+1}-S_nb_n$；

（3）求 $\sum_{k=1}^{2n}\left[a_{k+1}-(-1)^k a_k\right]b_k$.

【答案】（1）$a_n=2n-1,b_n=2^{n-1}$

（2）证明见解析　（3）$\frac{(3\mathrm{n}-1)4^{n+2}+16}{9}$

【解析】

【分析】（1）利用等差等比数列的通项公式进行基本量运算即可得解；

（2）由等比数列的性质及通项与前 n 项和的关系结合分析法即可得证；

（3）先求得 $\left[a_{2k}-(-1)^{2k-1}a_{2k-1}\right]b_{2k-1}+\left[a_{2k+1}-(-1)^{2k}a_{2k}\right]b_{2k}$，进而由并项求和可得 $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot 4^{k+1}$，再结合错位相减法可得解.

【小问 1 详解】

设 $\{a_n\}$ 公差为 d，$\{b_n\}$ 公比为 q，则 $a_n=1+(n-1)d, b_n=q^{n-1}$，

由 $a_2-b_2=a_3-b_3=1$ 可得 $\begin{cases}1+d-q=1\\1+2d-q^2=1\end{cases}\Rightarrow d=q=2$（$d=q=0$ 舍去），

所以 $a_n=2n-1, b_n=2^{n-1}$；

【小问 2 详解】

证明：因为 $b_{n+1}=2b_n\neq 0$, 所以要证 $(S_{n+1}+a_{n+1})b_n=S_{n+1}b_{n+1}-S_nb_n$，

即证 $(S_{n+1}+a_{n+1})b_n=S_{n+1}\cdot 2b_n-S_nb_n$，即证 $S_{n+1}+a_{n+1}=2S_{n+1}-S_n$，

即证 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，

而 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ 显然成立，所以 $(S_{n+1}+a_{n+1})b_n=S_{n+1}\cdot b_{n+1}-S_n\cdot b_n$；

【小问 3 详解】

因为 $\left[a_{2k}-(-1)^{2k-1}a_{2k-1}\right]b_{2k-1}+\left[a_{2k+1}-(-1)^{2k}a_{2k}\right]b_{2k}$

$=(4k-1+4k-3)\times 2^{2k-1}+[4k+1-(4k-1)]\times 2^{2k}=k\times 4^{k+1}$，

所以 $\sum\limits_{k=1}^{2n}\left[a_{k+1}-(-1)^k a_k\right]b_k=\sum\limits_{k=1}^{n}[(a_{2k}-(-1)^{2k-1}a_{2k-1})b_{2k-1}+(a_{2k+1}-(-1)^{2k}a_{2k})b_{2k}]$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}k\times 4^{k+1}$，

设 $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot 4^{k+1}$

所以 $T_n=1\times 4^2+2\times 4^3+3\times 4^4+\cdots+n\times 4^{n+1}$，

则 $4T_n=1\times 4^3+2\times 4^4+3\times 4^5+\cdots+n\times 4^{n+2}$，

作差得$-3T_n=4^2+4^3+4^4+\cdots+4^{n+1}-n\times4^{n+2}=\dfrac{4^2(1-4^n)}{1-4}-n\times4^{n+2}$

$=\dfrac{(1-3n)4^{n+2}-16}{3}$，

所以$T_n=\dfrac{(3n-1)4^{n+2}+16}{9}$，

所以$\sum\limits_{k=1}^{2n}\left[a_{k+1}-(-1)^k a_k\right]b_k=\dfrac{(3\mathrm{n}-1)4^{n+2}+16}{9}$.

19. 椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的右焦点为$F$、右顶点为$A$，上顶点为$B$，且满足$\dfrac{|BF|}{|AB|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆的离心率e；

（2）直线l与椭圆有唯一公共点M，与y轴相交于N（N异于M）. 记O为坐标原点，若$|OM|=|ON|$，且$\triangle OMN$的面积为$\sqrt{3}$，求椭圆的标准方程.

【答案】（1）$e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

（2）$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$

【解析】

【分析】（1）根据已知条件可得出关于a、b的等量关系，由此可求得该椭圆的离心率的值；

（2）由（1）可知椭圆的方程为$x^2+3y^2=a^2$，设直线l的方程为$y=kx+m$，将直线l的方程与椭圆方程联立，由$\Delta=0$可得出$3m^2=a^2\left(1+3k^2\right)$，求出点$M$的坐标，利用三角形的面积公式以及已知条件可求得$a^2$的值，即可得出椭圆的方程.

【小问1详解】

解：$\dfrac{|BF|}{|AB|}=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{b^2+a^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow4a^2=3\left(b^2+a^2\right)\Rightarrow a^2=3b^2$，

离心率为$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

【小问2详解】

解：由（1）可知椭圆的方程为$x^2+3y^2=a^2$，

易知直线l的斜率存在，设直线l的方程为$y=kx+m$，

联立$\begin{cases}y=kx+m\\x^2+3y^2=a^2\end{cases}$得$\left(1+3k^2\right)x^2+6kmx+\left(3m^2-a^2\right)=0$，

由$\Delta=36k^2m^2-4\left(1+3k^2\right)\left(3m^2-a^2\right)=0\Rightarrow 3m^2=a^2\left(1+3k^2\right)$，①

$x_M=-\dfrac{3km}{3k^2+1}$，$y_M=kx_M+m=\dfrac{m}{1+3k^2}$，

由$|OM|=|ON|$可得$m^2=\dfrac{m^2\left(9k^2+1\right)}{\left(3k^2+1\right)^2}$，②

由$S_{\triangle OMN}=\sqrt{3}$可得$\dfrac{1}{2}|m|\cdot\dfrac{|3km|}{1+3k^2}=\sqrt{3}$，③

联立①②③可得$k^2=\dfrac{1}{3}$，$m^2=4$，$a^2=6$，故椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

20. 已知a，$b\in\mathbf{R}$，函数$f(x)=\mathrm{e}^x-a\sin x,g(x)=b\sqrt{x}$

（1）求函数$y=f(x)$在$(0,f(0))$处的切线方程；

（2）若$y=f(x)$和$y=g(x)$有公共点，

（i）当$a=0$时，求b的取值范围；

（ii）求证：$a^2+b^2>\mathrm{e}$.

【答案】（1）$y=(1-a)x+1$

（2）（i）$b\in\left[\sqrt{2\mathrm{e}},+\infty\right)$；（ii）证明见解析

【解析】

【分析】（1）求出$f'(0)$可求切线方程；

（2）（i）当$a=0$时，曲线$y=f(x)$和$y=g(x)$有公共点即为$s(t)=\mathrm{e}^{t^2}-bt,t\geq 0$在$[0,+\infty)$上有零点，求导后分类讨论结合零点存在定理可求$b\in[\sqrt{2e},+\infty)$.

（ii）曲线$y=f(x)$和$y=g(x)$有公共点即$a\sin x_0+b\sqrt{x_0}-\mathrm{e}^{x_0}=0$，利用点到直线的距离得到$\sqrt{a^2+b^2}\geq\dfrac{\mathrm{e}^{x_0}}{\sqrt{\sin^2 x_0+x_0}}$，利用导数可证$\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\sin^2 x+x}>\mathrm{e}$，从而可得不等式成立.

【小问1详解】

$f'(x)=\mathrm{e}^x-a\cos x$，故$f'(0)=1-a$，而$f(0)=1$，

曲线$f(x)$在点$(0, f(0))$处的切线方程为$y=(1-a)(x-0)+1$即$y=(1-a)x+1$.

【小问2详解】

（i）当$a=0$时，

因为曲线$y=f(x)$和$y=g(x)$有公共点，故$e^x=b\sqrt{x}$有解，

设$t=\sqrt{x}$，故$x=t^2$，故$e^{t^2}=bt$在$[0,+\infty)$上有解，

设$s(t)=e^{t^2}-bt, t\ge 0$，故$s(t)$在$[0,+\infty)$上有零点，

而$s'(t)=2te^{t^2}-b, t>0$，

若$b=0$，则$s(t)=e^{t^2}>0$恒成立，此时$s(t)$在$[0,+\infty)$上无零点，

若$b<0$，则$s'(t)>0$在$(0,+\infty)$上恒成立，故$s(t)$在$[0,+\infty)$上为增函数，

而$s(0)=1>0$，$s(t)\ge s(0)=1$，故$s(t)$在$[0,+\infty)$上无零点，

故$b>0$，

设$u(t)=2te^{t^2}-b, t>0$，则$u'(t)=(2+4t^2)e^{t^2}>0$，

故$u(t)$在$(0,+\infty)$上为增函数，

而$u(0)=-b<0$，$u(b)=b\left(2e^{b^2}-1\right)>0$，

故$u(t)$在$(0,+\infty)$上存在唯一零点t_0，

且$0<t<t_0$时，$u(t)<0$；$t>t_0$时，$u(t)>0$；

故$0<t<t_0$时，$s'(t)<0$；$t>t_0$时，$s'(t)>0$；

所以$s(t)$在$(0,t_0)$上为减函数，在$(t_0,+\infty)$上为增函数，

故$s(t)_{\min}=s(t_0)$，

因为$s(t)$在$[0,+\infty)$上有零点，故$s(t_0)\le 0$，故$e^{t_0^2}-bt_0\le 0$，

而$2t_0e^{t_0^2}-b=0$，故$e^{t_0^2}-2t_0^2e^{t_0^2}\le 0$即$t_0\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

设$v(t)=2te^{t^2}, t>0$，则$v'(t)=(2+4t^2)e^{t^2}>0$，

故$v(t)$在$(0,+\infty)$上为增函数，

而 $b=2t_0e^{t_0^2}$，故 $b\geq\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2e}$.

（ii）因为曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 有公共点，

所以 $e^x-a\sin x=b\sqrt{x}$ 有解 x_0，其中 $x_0\geq0$，

若 $x_0=0$，则 $1-a\times0=b\times0$，该式不成立，故 $x_0>0$.

故 $a\sin x_0+b\sqrt{x_0}-e^{x_0}=0$，考虑直线 $a\sin x_0+b\sqrt{x_0}-e^{x_0}=0$，

$\sqrt{a^2+b^2}$ 表示原点与直线 $a\sin x_0+b\sqrt{x_0}-e^{x_0}=0$ 上的动点 (a,b) 之间的距离，

故 $\sqrt{a^2+b^2}\geq\dfrac{e^{x_0}}{\sqrt{\sin^2x_0+x_0}}$，所以 $a^2+b^2\geq\dfrac{e^{2x_0}}{\sin^2x_0+x_0}$，

下证：对任意 $x>0$，总有 $|\sin x|<x$，

证明：当 $x\geq\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $|\sin x|\leq1<\dfrac{\pi}{2}\leq x$，故 $|\sin x|<x$ 成立.

当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，即证 $\sin x<x$，

设 $p(x)=\sin x-x$，则 $p'(x)=\cos x-1\leq0$（不恒为零），

故 $p(x)=\sin x-x$ 在 $[0,+\infty)$ 上为减函数，故 $p(x)<p(0)=0$ 即 $\sin<x$ 成立.

综上，$|\sin x|<x$ 成立.

下证：当 $x>0$ 时，$e^x>x+1$ 恒成立，

$q(x)=e^x-1-x,x>0$，则 $q'(x)=e^x-1>0$，

故 $q(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，故 $q(x)>q(0)=0$ 即 $e^x>x+1$ 恒成立.

下证：$\dfrac{e^{2x}}{\sin^2x+x}$>e 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即证：$e^{2x-1}>\sin^2x+x$，

即证：$2x-1+1\geq\sin^2x+x$，即证：$x\geq\sin^2x$，

而 $x>|\sin x|\geq\sin^2x$，故 $x\geq\sin^2x$ 成立.

故 $\dfrac{e^{x_0}}{\sqrt{\sin^2x_0+x_0}}>e$，即 $a^2+b^2>e$ 成立.

【点睛】思路点睛：导数背景下零点问题，注意利用函数的单调性结合零点存在定理来处理，而多变量的

不等式的成立问题，注意从几何意义取构建不等式关系，再利用分析法来证明目标不等式.