

绝密☆启用前 试卷类型：A

2022 年普通高等学校招生全国统一考试

数学

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (A) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $M = \{x | \sqrt{x} < 4\}$ ， $N = \{x | 3x \geq 1\}$ ，则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{x | 0 \leq x < 2\}$ B. $\left\{x \mid \frac{1}{3} \leq x < 2\right\}$ C. $\{x | 3 \leq x < 16\}$ D.

$\left\{x \mid \frac{1}{3} \leq x < 16\right\}$

【答案】D

【解析】

【分析】求出集合 M, N 后可求 $M \cap N$ 。

【详解】 $M = \{x | 0 \leq x < 16\}$ ， $N = \{x | x \geq \frac{1}{3}\}$ ，故 $M \cap N = \left\{x \mid \frac{1}{3} \leq x < 16\right\}$ 。

故选：D

2. 若 $i(1-z) = 1$ ，则 $z + \bar{z} =$ ()

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】利用复数的除法可求 z ，从而可求 $z + \bar{z}$ 。

【详解】由题设有 $1-z = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$ ，故 $z = 1+i$ ，故 $z + \bar{z} = (1+i) + (1-i) = 2$ ，

故选: D

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, $BD=2DA$. 记 $\overrightarrow{CA}=\vec{m}, \overrightarrow{CD}=\vec{n}$, 则 $\overrightarrow{CB}=(\quad)$

- A. $3\vec{m}-2\vec{n}$ B. $-2\vec{m}+3\vec{n}$ C. $3\vec{m}+2\vec{n}$ D. $2\vec{m}+3\vec{n}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据几何条件以及平面向量的线性运算即可解出.

【详解】因为点 D 在边 AB 上, $BD=2DA$, 所以 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DA}$, 即 $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=2(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD})$,

所以 $\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CA}=3\vec{n}-2\vec{m}=-2\vec{m}+3\vec{n}$.

故选: B.

4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题, 其中一部分水蓄入某水库. 已知该水库水位为海拔 148.5m 时, 相应水面的面积为 140.0km^2 ; 水位为海拔 157.5m 时, 相应水面的面积为 180.0km^2 , 将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台, 则该水库水位从海拔

148.5m 上升到 157.5m 时, 增加的水量约为 $(\sqrt{7} \approx 2.65)$ (\quad)

- A. $1.0 \times 10^9 \text{m}^3$ B. $1.2 \times 10^9 \text{m}^3$ C. $1.4 \times 10^9 \text{m}^3$ D. $1.6 \times 10^9 \text{m}^3$

【答案】C

【解析】

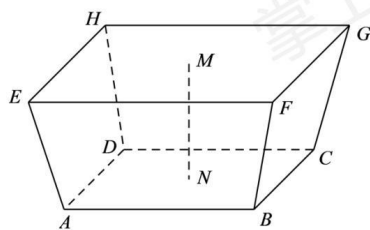
【分析】根据题意只要求出棱台的高, 即可利用棱台的体积公式求出.

【详解】依题意可知棱台的高为 $MN=157.5-148.5=9(\text{m})$, 所以增加的水量即为棱台的体积 V .

棱台上底面积 $S=140.0\text{km}^2=140 \times 10^6 \text{m}^2$, 下底面积 $S'=180.0\text{km}^2=180 \times 10^6 \text{m}^2$,

$$\therefore V = \frac{1}{3}h(S+S'+\sqrt{SS'}) = \frac{1}{3} \times 9 \times (140 \times 10^6 + 180 \times 10^6 + \sqrt{140 \times 180 \times 10^{12}})$$

$$= 3 \times (320 + 60\sqrt{7}) \times 10^6 \approx (96 + 18 \times 2.65) \times 10^7 = 1.437 \times 10^9 \approx 1.4 \times 10^9 (\text{m}^3).$$



故选: C.

5. 从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数, 则这 2 个数互质的概率为 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】由古典概型概率公式结合组合、列举法即可得解.

【详解】从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数, 共有 $C_7^2 = 21$ 种不同的取法, 若两数不互质, 不同的取法有: $(2,4), (2,6), (2,8), (3,6), (4,6), (4,8), (6,8)$, 共 7 种, 故所求概率 $P = \frac{21-7}{21} = \frac{2}{3}$.

故选: D.

6. 记函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) + b (\omega > 0)$ 的最小正周期为 T . 若 $\frac{2\pi}{3} < T < \pi$, 且 $y = f(x)$

的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$ 中心对称, 则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = ()$

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】由三角函数的图象与性质可求得参数, 进而可得函数解析式, 代入即可得解.

【详解】由函数的最小正周期 T 满足 $\frac{2\pi}{3} < T < \pi$, 得 $\frac{2\pi}{3} < \frac{2\pi}{\omega} < \pi$, 解得 $2 < \omega < 3$,

又因为函数图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$ 对称, 所以 $\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in Z$, 且 $b = 2$,

所以 $\omega = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3}k, k \in Z$, 所以 $\omega = \frac{5}{2}$, $f(x) = \sin\left(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$,

所以 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{5}{4}\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = 1$.

故选: A

7. 设 $a = 0.1e^{0.1}, b = \frac{1}{9}, c = -\ln 0.9$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

【答案】C

【解析】

【分析】构造函数 $f(x) = \ln(1+x) - x$ ，导数判断其单调性，由此确定 a, b, c 的大小.

【详解】设 $f(x) = \ln(1+x) - x (x > -1)$ ，因为 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$ ，

当 $x \in (-1, 0)$ 时， $f'(x) > 0$ ，当 $x \in (0, +\infty)$ 时 $f'(x) < 0$ ，

所以函数 $f(x) = \ln(1+x) - x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减，在 $(-1, 0)$ 上单调递增，

所以 $f(\frac{1}{9}) < f(0) = 0$ ，所以 $\ln \frac{10}{9} - \frac{1}{9} < 0$ ，故 $\frac{1}{9} > \ln \frac{10}{9} = -\ln 0.9$ ，即 $b > c$ ，

所以 $f(-\frac{1}{10}) < f(0) = 0$ ，所以 $\ln \frac{9}{10} + \frac{1}{10} < 0$ ，故 $\frac{9}{10} < e^{-\frac{1}{10}}$ ，所以 $\frac{1}{10} e^{\frac{1}{10}} < \frac{1}{9}$ ，

故 $a < b$ ，

设 $g(x) = x e^x + \ln(1-x) (0 < x < 1)$ ，则 $g'(x) = (x+1)e^x + \frac{1}{x-1} = \frac{(x^2-1)e^x+1}{x-1}$ ，

令 $h(x) = e^x(x^2-1)+1$ ， $h'(x) = e^x(x^2+2x-1)$ ，

当 $0 < x < \sqrt{2}-1$ 时， $h'(x) < 0$ ，函数 $h(x) = e^x(x^2-1)+1$ 单调递减，

当 $\sqrt{2}-1 < x < 1$ 时， $h'(x) > 0$ ，函数 $h(x) = e^x(x^2-1)+1$ 单调递增，

又 $h(0) = 0$ ，

所以当 $0 < x < \sqrt{2}-1$ 时， $h(x) < 0$ ，

所以当 $0 < x < \sqrt{2}-1$ 时， $g'(x) > 0$ ，函数 $g(x) = x e^x + \ln(1-x)$ 单调递增，

所以 $g(0.1) > g(0) = 0$ ，即 $0.1 e^{0.1} > -\ln 0.9$ ，所以 $a > c$

故选：C.

8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l ，其各顶点都在同一球面上.若该球的体积为 36π ，且

$3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$ ，则该正四棱锥体积的取值范围是 ()

A. $\left[18, \frac{81}{4}\right]$

B. $\left[\frac{27}{4}, \frac{81}{4}\right]$

C. $\left[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}\right]$

D.

[18,27]

【答案】C

【解析】

【分析】设正四棱锥的高为 h ，由球的截面性质列方程求出正四棱锥的底面边长与高的关系，由此确定正四棱锥体积的取值范围.

【详解】∵ 球的体积为 36π ，所以球的半径 $R = 3$ ，

设正四棱锥的底面边长为 $2a$ ，高为 h ，

$$\text{则 } l^2 = 2a^2 + h^2, \quad 3^2 = 2a^2 + (3-h)^2,$$

$$\text{所以 } 6h = l^2, \quad 2a^2 = l^2 - h^2$$

$$\text{所以正四棱锥的体积 } V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 4a^2 \times h = \frac{2}{3} \times (l^2 - \frac{l^4}{36}) \times \frac{l^2}{6} = \frac{1}{9} \left(l^4 - \frac{l^6}{36} \right),$$

$$\text{所以 } V' = \frac{1}{9} \left(4l^3 - \frac{l^5}{6} \right) = \frac{1}{9} l^3 \left(\frac{24 - l^2}{6} \right),$$

当 $3 \leq l \leq 2\sqrt{6}$ 时， $V' > 0$ ，当 $2\sqrt{6} < l \leq 3\sqrt{3}$ 时， $V' < 0$ ，

所以当 $l = 2\sqrt{6}$ 时，正四棱锥的体积 V 取最大值，最大值为 $\frac{64}{3}$ ，

$$\text{又 } l = 3 \text{ 时， } V = \frac{27}{4}, \quad l = 3\sqrt{3} \text{ 时， } V = \frac{81}{4},$$

所以正四棱锥的体积 V 的最小值为 $\frac{27}{4}$ ，

所以该正四棱锥体积的取值范围是 $\left[\frac{27}{4}, \frac{64}{3} \right]$ 。

故选：C。

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ，则 ()

- A. 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 90° B. 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 90°
C. 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 45° D. 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45°

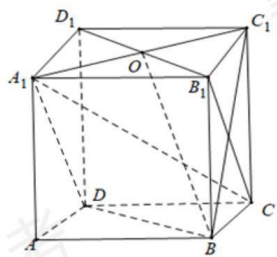
【答案】ABD

【解析】

【分析】数形结合，依次对所给选项进行判断即可。

【详解】如图，连接 B_1C 、 BC_1 ，因为 $DA_1 // B_1C$ ，所以直线 BC_1 与 B_1C 所成的角即为直线 BC_1 与 DA_1 所成的角，

因为四边形 BB_1C_1C 为正方形，则 $B_1C \perp BC_1$ ，故直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 90° ，A 正确；



连接 A_1C ，因为 $A_1B_1 \perp$ 平面 BB_1C_1C ， $BC_1 \subset$ 平面 BB_1C_1C ，则 $A_1B_1 \perp BC_1$ ，

因为 $B_1C \perp BC_1$ ， $A_1B_1 \cap B_1C = B_1$ ，所以 $BC_1 \perp$ 平面 A_1B_1C ，

又 $A_1C \subset$ 平面 A_1B_1C ，所以 $BC_1 \perp CA_1$ ，故 B 正确；

连接 A_1C_1 ，设 $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$ ，连接 BO ，

因为 $BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ， $C_1O \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，则 $C_1O \perp B_1B$ ，

因为 $C_1O \perp B_1D_1$ ， $B_1D_1 \cap B_1B = B_1$ ，所以 $C_1O \perp$ 平面 BB_1D_1D ，

所以 $\angle C_1BO$ 为直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角，

设正方体棱长为 1，则 $C_1O = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $BC_1 = \sqrt{2}$ ， $\sin \angle C_1BO = \frac{C_1O}{BC_1} = \frac{1}{2}$ ，

所以，直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 30° ，故 C 错误；

因为 $C_1C \perp$ 平面 $ABCD$ ，所以 $\angle C_1BC$ 为直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角，易得

$\angle C_1BC = 45^\circ$ ，故 D 正确。

故选：ABD

10. 已知函数 $f(x) = x^3 - x + 1$ ，则 ()

A. $f(x)$ 有两个极值点

B. $f(x)$ 有三个零点

C. 点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心

D. 直线 $y = 2x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线

【答案】AC

【解析】

【分析】利用极值点的定义可判断 A，结合 $f(x)$ 的单调性、极值可判断 B，利用平移可判断

C；利用导数的几何意义判断 D.

【详解】由题， $f'(x) = 3x^2 - 1$ ，令 $f'(x) > 0$ 得 $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

令 $f'(x) < 0$ 得 $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 上单调递减, 在 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ 是极值点, 故 A 正确;

因 $f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$, $f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$, $f(-2) = -5 < 0$,

所以, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ 上有一个零点,

当 $x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $f(x) \geq f(\frac{\sqrt{3}}{3}) > 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ 上无零点,

综上所述, 函数 $f(x)$ 有一个零点, 故 B 错误;

令 $h(x) = x^3 - x$, 该函数的定义域为 \mathbf{R} , $h(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -h(x)$,

则 $h(x)$ 是奇函数, $(0, 0)$ 是 $h(x)$ 的对称中心,

将 $h(x)$ 的图象向上移动一个单位得到 $f(x)$ 的图象,

所以点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心, 故 C 正确;

令 $f'(x) = 3x^2 - 1 = 2$, 可得 $x = \pm 1$, 又 $f(1) = f(-1) = 1$,

当切点为 $(1, 1)$ 时, 切线方程为 $y = 2x - 1$, 当切点为 $(-1, 1)$ 时, 切线方程为 $y = 2x + 3$,

故 D 错误.

故选: AC

11. 已知 O 为坐标原点, 点 $A(1, 1)$ 在抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 上, 过点 $B(0, -1)$ 的直线交 C 于 P, Q 两点, 则 ()

A. C 的准线为 $y = -1$

B. 直线 AB 与 C 相切

C. $|OP| \cdot |OQ| > |OA|^2$

D. $|BP| \cdot |BQ| > |BA|^2$

【答案】BCD

【解析】

【分析】求出抛物线方程可判断 A, 联立 AB 与抛物线的方程求交点可判断 B, 利用距离公式及弦长公式可判断 C、D.

【详解】将点 A 代入抛物线方程得 $1 = 2p$, 所以抛物线方程为 $x^2 = y$, 故准线方程为

$$y = -\frac{1}{4}, \text{ A 错误;}$$

$$k_{AB} = \frac{1 - (-1)}{1 - 0} = 2, \text{ 所以直线 } AB \text{ 的方程为 } y = 2x - 1,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 = y \end{cases}, \text{ 可得 } x^2 - 2x + 1 = 0, \text{ 解得 } x = 1, \text{ 故 B 正确;}$$

设过 B 的直线为 l, 若直线 l 与 y 轴重合, 则直线 l 与抛物线 C 只有一个交点,

所以, 直线 l 的斜率存在, 设其方程为 $y = kx - 1, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2),$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx - 1 \\ x^2 = y \end{cases}, \text{ 得 } x^2 - kx + 1 = 0,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} \Delta = k^2 - 4 > 0 \\ x_1 + x_2 = k \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}, \text{ 所以 } k > 2 \text{ 或 } k < -2, y_1 y_2 = (x_1 x_2)^2 = 1,$$

$$\text{又 } |OP| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{y_1 + y_1^2}, |OQ| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{y_2 + y_2^2},$$

$$\text{所以 } |OP| \cdot |OQ| = \sqrt{y_1 y_2 (1 + y_1)(1 + y_2)} = \sqrt{kx_1 \times kx_2} = |k| > 2 = |OA|^2, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{因为 } |BP| = \sqrt{1 + k^2} |x_1|, |BQ| = \sqrt{1 + k^2} |x_2|,$$

$$\text{所以 } |BP| \cdot |BQ| = (1 + k^2) |x_1 x_2| = 1 + k^2 > 5, \text{ 而 } |BA|^2 = 5, \text{ 故 D 正确.}$$

故选: BCD

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 记 $g(x) = f'(x)$, 若 $f\left(\frac{3}{2} - 2x\right)$,

$g(2+x)$ 均为偶函数, 则 ()

A. $f(0) = 0$ B. $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ C. $f(-1) = f(4)$ D.

$$g(-1) = g(2)$$

【答案】BC

【解析】

【分析】转化题设条件为函数的对称性, 结合原函数与导函数图象的关系, 根据函数的性质逐项判断即可得解.

【详解】因为 $f\left(\frac{3}{2} - 2x\right), g(2+x)$ 均为偶函数,

$$\text{所以 } f\left(\frac{3}{2} - 2x\right) = f\left(\frac{3}{2} + 2x\right) \text{ 即 } f\left(\frac{3}{2} - x\right) = f\left(\frac{3}{2} + x\right), g(2+x) = g(2-x),$$

所以 $f(3-x) = f(x)$, $g(4-x) = g(x)$, 则 $f(-1) = f(4)$, 故 C 正确;

函数 $f(x)$, $g(x)$ 的图象分别关于直线 $x = \frac{3}{2}, x = 2$ 对称,

又 $g(x) = f'(x)$, 且函数 $f(x)$ 可导,

所以 $g\left(\frac{3}{2}\right) = 0, g(3-x) = -g(x)$,

所以 $g(4-x) = g(x) = -g(3-x)$, 所以 $g(x+2) = -g(x+1) = g(x)$,

所以 $g\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{3}{2}\right) = 0, g(-1) = g(1) = -g(2)$, 故 B 正确, D 错误;

若函数 $f(x)$ 满足题设条件, 则函数 $f(x) + C$ (C 为常数) 也满足题设条件, 所以无法确定 $f(x)$ 的函数值, 故 A 错误.

故选: BC.

【点睛】 关键点点睛: 解决本题的关键是转化题干条件为抽象函数的性质, 准确把握原函数与导函数图象间的关系, 准确把握函数的性质 (必要时结合图象) 即可得解.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $\left(1 - \frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为 _____ (用数字作答).

【答案】 -28

【解析】

【分析】 $\left(1 - \frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 可化为 $(x+y)^8 - \frac{y}{x}(x+y)^8$, 结合二项式展开式的通项公式求解.

【详解】 因为 $\left(1 - \frac{y}{x}\right)(x+y)^8 = (x+y)^8 - \frac{y}{x}(x+y)^8$,

所以 $\left(1 - \frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中含 x^2y^6 的项为 $C_8^6 x^2 y^6 - \frac{y}{x} C_8^5 x^3 y^5 = -28x^2 y^6$,

$\left(1 - \frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为 -28

故答案为: -28

14. 写出与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ 都相切的一条直线的方程

_____.

【答案】 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ 或 $y = \frac{7}{24}x - \frac{25}{24}$ 或 $x = -1$

【解析】

【分析】先判断两圆位置关系，分情况讨论即可.

【详解】圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的圆心为 $O(0,0)$ ，半径为1，圆 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ 的圆心 O_1 为 $(3,4)$ ，半径为4，

两圆圆心距为 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，等于两圆半径之和，故两圆外切，

如图，

当切线为 l 时，因为 $k_{OO_1} = \frac{4}{3}$ ，所以 $k_l = -\frac{3}{4}$ ，设方程为 $y = -\frac{3}{4}x + t (t > 0)$

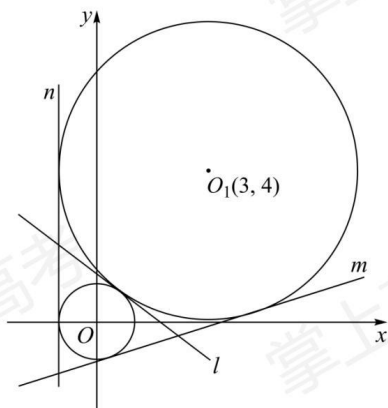
O 到 l 的距离 $d = \frac{|t|}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = 1$ ，解得 $t = \frac{5}{4}$ ，所以 l 的方程为 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ ，

当切线为 m 时，设直线方程为 $kx + y + p = 0$ ，其中 $p > 0$ ， $k < 0$ ，

$$\text{由题意} \begin{cases} \frac{|p|}{\sqrt{1+k^2}} = 1 \\ |3k+4+p| = 4 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -\frac{7}{24} \\ p = \frac{25}{24} \end{cases}, y = \frac{7}{24}x - \frac{25}{24}$$

当切线为 n 时，易知切线方程为 $x = -1$ ，

故答案为： $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ 或 $y = \frac{7}{24}x - \frac{25}{24}$ 或 $x = -1$.



15. 若曲线 $y = (x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

【解析】

【分析】 设出切点横坐标 x_0 ，利用导数的几何意义求得切线方程，根据切线经过原点得到关于 x_0 的方程，根据此方程应有两个不同的实数根，求得 a 的取值范围。

【详解】 $\because y = (x+a)e^x, \therefore y' = (x+1+a)e^x,$

设切点为 (x_0, y_0) ，则 $y_0 = (x_0+a)e^{x_0}$ ，切线斜率 $k = (x_0+1+a)e^{x_0}$ ，

切线方程为： $y - (x_0+a)e^{x_0} = (x_0+1+a)e^{x_0}(x-x_0)$ ，

\because 切线过原点， $\therefore -(x_0+a)e^{x_0} = (x_0+1+a)e^{x_0}(-x_0)$ ，

整理得： $x_0^2 + ax_0 - a = 0$ ，

\because 切线有两条， $\therefore \Delta = a^2 + 4a > 0$ ，解得 $a < -4$ 或 $a > 0$ ，

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ ，

故答案为： $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ， C 的上顶点为 A ，两个焦点为 F_1, F_2 ，离心率为

$\frac{1}{2}$ 。过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D, E 两点， $|DE| = 6$ ，则 $\triangle ADE$ 的周长是

【答案】 13

【解析】

【分析】 利用离心率得到椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$ ，即 $3x^2 + 4y^2 - 12c^2 = 0$ ，根据离心

率得到直线 AF_2 的斜率，进而利用直线的垂直关系得到直线 DE 的斜率，写出直线 DE 的

方程： $x = \sqrt{3}y - c$ ，代入椭圆方程 $3x^2 + 4y^2 - 12c^2 = 0$ ，整理化简得到：

$13y^2 - 6\sqrt{3}cy - 9c^2 = 0$ ，利用弦长公式求得 $c = \frac{13}{8}$ ，得 $a = 2c = \frac{13}{4}$ ，根据对称性将 $\triangle ADE$

的周长转化为 $\triangle F_2DE$ 的周长，利用椭圆的定义得到周长为 $4a = 13$ 。

【详解】 \because 椭圆的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ ， $\therefore a = 2c$ ， $\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 3c^2$ ， \therefore 椭圆的方程

为 $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$ ，即 $3x^2 + 4y^2 - 12c^2 = 0$ ，不妨设左焦点为 F_1 ，右焦点为 F_2 ，如图所示，

$\because AF_2 = a$ ， $OF_2 = c$ ， $a = 2c$ ， $\therefore \angle AF_2O = \frac{\pi}{3}$ ， $\therefore \triangle AF_1F_2$ 为正三角形， \because 过 F_1 且垂直

于 AF_2 的直线与 C 交于 D, E 两点， DE 为线段 AF_2 的垂直平分线， \therefore 直线 DE 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

斜率倒数为 $\sqrt{3}$ ，直线 DE 的方程： $x = \sqrt{3}y - c$ ，代入椭圆方程 $3x^2 + 4y^2 - 12c^2 = 0$ ，

整理化简得到： $13y^2 - 6\sqrt{3}cy - 9c^2 = 0$ ，

判别式 $\Delta = (6\sqrt{3}c)^2 + 4 \times 13 \times 9c^2 = 6^2 \times 16 \times c^2$ ，

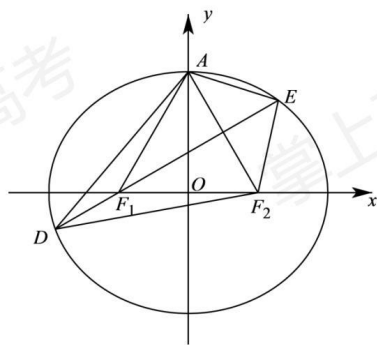
$\therefore |CD| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} |y_1 - y_2| = 2 \times \frac{\sqrt{\Delta}}{13} = 2 \times 6 \times 4 \times \frac{c}{13} = 6$ ，

$\therefore c = \frac{13}{8}$ ，得 $a = 2c = \frac{13}{4}$ ，

$\because DE$ 为线段 AF_2 的垂直平分线，根据对称性， $AD = DF_2$ ， $AE = EF_2$ ， $\therefore \triangle ADE$ 的周长等于 $\triangle F_2DE$ 的周长，利用椭圆的定义得到 $\triangle F_2DE$ 周长为

$$|DF_2| + |EF_2| + |DE| = |DF_2| + |EF_2| + |DF_1| + |EF_1| = |DF_1| + |DF_2| + |EF_1| + |EF_2| = 2a + 2a = 4a = 13$$

故答案为：13.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1 = 1$ ， $\left\{ \frac{S_n}{a_n} \right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明： $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2$ 。

【答案】(1) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) 见解析

【解析】

【分析】(1)利用等差数列的通项公式求得 $\frac{S_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{n+2}{3}$, 得到 $S_n = \frac{(n+2)a_n}{3}$,

利用和与项的关系得到当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{(n+2)a_n}{3} - \frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$, 进而得:

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1}$, 利用累乘法求得 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, 检验对于 $n=1$ 也成立, 得到 $\{a_n\}$ 的通项公

式 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$;

(2) 由 (1) 的结论, 利用裂项求和法得到 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$, 进而证得.

【小问 1 详解】

$\because a_1 = 1, \therefore S_1 = a_1 = 1, \therefore \frac{S_1}{a_1} = 1$,

又 $\because \left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列,

$\therefore \frac{S_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{n+2}{3}, \therefore S_n = \frac{(n+2)a_n}{3}$,

\therefore 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = \frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$,

$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{(n+2)a_n}{3} - \frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$,

整理得: $(n-1)a_n = (n+1)a_{n-1}$,

即 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1}$,

$\therefore a_n = a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \dots \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \frac{a_n}{a_{n-1}}$
 $= 1 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n}{n-2} \times \frac{n+1}{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}$,

显然对于 $n=1$ 也成立,

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$;

【小问 2 详解】

$$\frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < 2$$

18. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{\cos A}{1 + \sin A} = \frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B}$.

(1) 若 $C = \frac{2\pi}{3}$, 求 B ;

(2) 求 $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$ 的最小值.

【答案】(1) $\frac{\pi}{6}$;

(2) $4\sqrt{2} - 5$.

【解析】

【分析】(1) 根据二倍角公式以及两角差的余弦公式可将 $\frac{\cos A}{1 + \sin A} = \frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B}$ 化成

$\cos(A+B) = \sin B$, 再结合 $0 < B < \frac{\pi}{2}$, 即可求出;

(2) 由(1)知, $C = \frac{\pi}{2} + B$, $A = \frac{\pi}{2} - 2B$, 再利用正弦定理以及二倍角公式将 $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$ 化

成 $4\cos^2 B + \frac{2}{\cos^2 B} - 5$, 然后利用基本不等式即可解出.

【小问1详解】

因为 $\frac{\cos A}{1 + \sin A} = \frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B} = \frac{2\sin B \cos B}{2\cos^2 B} = \frac{\sin B}{\cos B}$, 即

$\sin B = \cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos(A+B) = -\cos C = \frac{1}{2}$,

而 $0 < B < \frac{\pi}{2}$, 所以 $B = \frac{\pi}{6}$;

【小问2详解】

由(1)知, $\sin B = -\cos C > 0$, 所以 $\frac{\pi}{2} < C < \pi, 0 < B < \frac{\pi}{2}$,

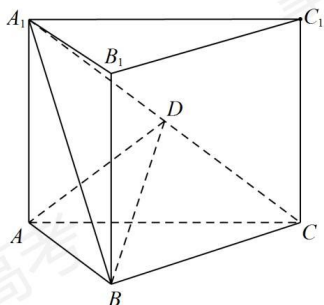
而 $\sin B = -\cos C = \sin\left(C - \frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $C = \frac{\pi}{2} + B$, 即有 $A = \frac{\pi}{2} - 2B$.

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{a^2 + b^2}{c^2} &= \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\cos^2 2B + 1 - \cos^2 B}{\cos^2 B} \\ &= \frac{(2\cos^2 B - 1)^2 + 1 - \cos^2 B}{\cos^2 B} = 4\cos^2 B + \frac{2}{\cos^2 B} - 5 \geq 2\sqrt{8} - 5 = 4\sqrt{2} - 5. \end{aligned}$$

当且仅当 $\cos^2 B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号, 所以 $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$ 的最小值为 $4\sqrt{2} - 5$.

19. 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 4, $\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.



(1) 求 A 到平面 A_1BC 的距离;

(2) 设 D 为 A_1C 的中点, $AA_1 = AB$, 平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 求二面角 $A - BD - C$ 的正弦值.

【答案】 (1) $\sqrt{2}$

(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 由等体积法运算即可得解;

(2) 由面面垂直的性质及判定可得 $BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 建立空间直角坐标系, 利用空间向量法即可得解.

【小问 1 详解】

在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 设点 A 到平面 A_1BC 的距离为 h ,

$$\text{则 } V_{A-A_1BC} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1BC} \cdot h = \frac{2\sqrt{2}}{3} h = V_{A_1-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} V_{ABC-A_1B_1C_1} = \frac{4}{3},$$

解得 $h = \sqrt{2}$,

所以点 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$;

【小问 2 详解】

取 A_1B 的中点 E , 连接 AE . 如图, 因为 $AA_1 = AB$, 所以 $AE \perp A_1B$,

又平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 平面 $A_1BC \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = A_1B$,

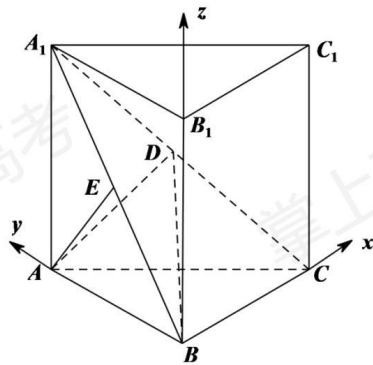
且 $AE \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $AE \perp$ 平面 A_1BC ,

在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $BB_1 \perp$ 平面 ABC ,

由 $BC \subset$ 平面 A_1BC , $BC \subset$ 平面 ABC 可得 $AE \perp BC$, $BB_1 \perp BC$,

又 $AE, BB_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 且相交, 所以 $BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 ,

所以 BC, BA, BB_1 两两垂直, 以 B 为原点, 建立空间直角坐标系, 如图,



由 (1) 得 $AE = \sqrt{2}$, 所以 $AA_1 = AB = 2$, $A_1B = 2\sqrt{2}$, 所以 $BC = 2$,

则 $A(0,2,0), A_1(0,2,2), B(0,0,0), C(2,0,0)$, 所以 A_1C 的中点 $D(1,1,1)$,

则 $\overrightarrow{BD} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{BA} = (0,2,0)$, $\overrightarrow{BC} = (2,0,0)$,

设平面 ABD 的一个法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BD} = x + y + z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BA} = 2y = 0 \end{cases}$,

可取 $\vec{m} = (1, 0, -1)$,

设平面 BDC 的一个法向量 $\vec{n} = (a, b, c)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = a + b + c = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 2a = 0 \end{cases}$,

可取 $\vec{n} = (0, 1, -1)$,

$$\text{则 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以二面角 } A-BD-C \text{ 的正弦值为 } \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

20. 一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯（卫生习惯分为良好和不够良好两类）的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例（称为病例组），同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人（称为对照组），得到如下数据：

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1) 能否有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异？

(2) 从该地的人群中任选一人， A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”， B 表示事件“选到的人患有该疾病”。 $\frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$ 与 $\frac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为 R 。

(i) 证明： $R = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$ ；

(ii) 利用该调查数据，给出 $P(A|B), P(A|\bar{B})$ 的估计值，并利用 (i) 的结果给出 R 的估计值。

$$\text{附 } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【答案】(1) 答案见解析

(2) (i) 证明见解析；(ii) $R = 6$ ；

【解析】

【分析】(1) 由所给数据结合公式求出 K^2 的值，将其与临界值比较大小，由此确定是否有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异；(2) (i) 根据定义结合条件概率公式即可完成证明；(ii) 根据 (i) 结合已知数据求 R 。

【小问1详解】

$$\text{由已知 } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{200(40 \times 90 - 60 \times 10)^2}{50 \times 150 \times 100 \times 100} = 24,$$

$$\text{又 } P(K^2 \geq 6.635) = 0.01, \quad 24 > 6.635,$$

所以有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异.

【小问2详解】

$$(i) \text{ 因为 } R = \frac{P(B|A) \cdot P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{B}|A) \cdot P(B|\bar{A})} = \frac{P(AB)}{P(A)} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})} \cdot \frac{P(\bar{A})}{P(\bar{A}\bar{B})} \cdot \frac{P(A)}{P(AB)},$$

$$\text{所以 } R = \frac{P(AB)}{P(B)} \cdot \frac{P(B)}{P(AB)} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})} \cdot \frac{P(\bar{B})}{P(\bar{A}\bar{B})}$$

$$\text{所以 } R = \frac{P(A|B) \cdot P(\bar{A}|\bar{B})}{P(\bar{A}|B) \cdot P(A|\bar{B})},$$

(ii)

$$\text{由已知 } P(A|B) = \frac{40}{100}, \quad P(A|\bar{B}) = \frac{10}{100},$$

$$\text{又 } P(\bar{A}|B) = \frac{60}{100}, \quad P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{90}{100},$$

$$\text{所以 } R = \frac{P(A|B) \cdot P(\bar{A}|\bar{B})}{P(\bar{A}|B) \cdot P(A|\bar{B})} = 6$$

21. 已知点 $A(2,1)$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2-1} = 1 (a > 1)$ 上, 直线 l 交 C 于 P, Q 两点, 直线

AP, AQ 的斜率之和为 0.

(1) 求 l 的斜率;

(2) 若 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$, 求 $\triangle PAQ$ 的面积.

【答案】(1) -1 ;

(2) $\frac{16\sqrt{2}}{9}$.

【解析】

【分析】(1) 由点 $A(2,1)$ 在双曲线上可求出 a , 易知直线 l 的斜率存在, 设 $l: y = kx + m$,

$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 再根据 $k_{AP} + k_{AQ} = 0$, 即可解出 l 的斜率;

(2) 根据直线 AP, AQ 的斜率之和为 0 可知直线 AP, AQ 的倾斜角互补, 再根据

$\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$ 即可求出直线 AP, AQ 的斜率, 再分别联立直线 AP, AQ 与双曲线方程

求出点 P, Q 的坐标, 即可得到直线 PQ 的方程以及 PQ 的长, 由点到直线的距离公式求出点

A 到直线 PQ 的距离, 即可得出 $\triangle PAQ$ 的面积.

【小问 1 详解】

因为点 $A(2,1)$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2-1} = 1(a > 1)$ 上, 所以 $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{a^2-1} = 1$, 解得 $a^2 = 2$,

即双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$

易知直线 l 的斜率存在, 设 $l: y = kx + m$, $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \end{cases} \text{ 可得, } (1-2k^2)x^2 - 4mkx - 2m^2 - 2 = 0,$$

$$\text{所以, } x_1 + x_2 = -\frac{4mk}{2k^2-1}, x_1x_2 = \frac{2m^2+2}{2k^2-1},$$

$$\Delta = 16m^2k^2 + 4(2m^2+2)(2k^2-1) > 0 \Rightarrow m^2 - 1 + 2k^2 > 0.$$

$$\text{所以由 } k_{AP} + k_{BP} = 0 \text{ 可得, } \frac{y_2-1}{x_2-2} + \frac{y_1-1}{x_1-2} = 0,$$

$$\text{即 } (x_1-2)(kx_2+m-1) + (x_2-2)(kx_1+m-1) = 0,$$

$$\text{即 } 2kx_1x_2 + (m-1-2k)(x_1+x_2) - 4(m-1) = 0,$$

$$\text{所以 } 2k \times \frac{2m^2+2}{2k^2-1} + (m-1-2k) \left(-\frac{4mk}{2k^2-1} \right) - 4(m-1) = 0,$$

$$\text{化简得, } 8k^2 + 4k - 4 + 4m(k+1) = 0, \text{ 即 } (k+1)(2k-1+m) = 0,$$

$$\text{所以 } k = -1 \text{ 或 } m = 1 - 2k,$$

当 $m = 1 - 2k$ 时, 直线 $l: y = kx + m = k(x-2) + 1$ 过点 $A(2,1)$, 与题意不符, 舍去,

故 $k = -1$.

【小问 2 详解】

不妨设直线 PA, PB 的倾斜角为 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$, 因为 $k_{AP} + k_{BP} = 0$, 所以 $\alpha + \beta = \pi$,

因为 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$, 所以 $\tan(\beta - \alpha) = 2\sqrt{2}$, 即 $\tan 2\alpha = -2\sqrt{2}$,

$$\text{即 } \sqrt{2} \tan^2 \alpha - \tan \alpha - \sqrt{2} = 0, \text{ 解得 } \tan \alpha = \sqrt{2},$$

于是, 直线 $PA: y = \sqrt{2}(x-2) + 1$, 直线 $PB: y = -\sqrt{2}(x-2) + 1$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = \sqrt{2}(x-2) + 1 \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \end{cases} \text{ 可得, } \frac{3}{2}x^2 + 2(1-2\sqrt{2})x + 10 - 4\sqrt{2} = 0,$$

因为方程有一个根为2, 所以 $x_P = \frac{10-4\sqrt{2}}{3}$, $y_P = \frac{4\sqrt{2}-5}{3}$,

同理可得, $x_Q = \frac{10+4\sqrt{2}}{3}$, $y_Q = \frac{-4\sqrt{2}-5}{3}$.

所以 $PQ: x+y-\frac{5}{3}=0$, $|PQ| = \frac{16}{3}$,

点A到直线PQ的距离 $d = \frac{|2+1-\frac{5}{3}|}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

故 $\triangle PAQ$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times \frac{16}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{9}$.

22. 已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值.

(1) 求 a ;

(2) 证明: 存在直线 $y = b$, 其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

【答案】(1) $a = 1$

(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据导数可得函数的单调性, 从而可得相应的最小值, 根据最小值相等可求 a . 注意分类讨论.

(2) 根据(1)可得当 $b > 1$ 时, $e^x - x = b$ 的解的个数、 $x - \ln x = b$ 的解的个数均为2, 构建新函数 $h(x) = e^x + \ln x - 2x$, 利用导数可得该函数只有一个零点且可得 $f(x), g(x)$ 的大小关系, 根据存在直线 $y = b$ 与曲线 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 有三个不同的交点可得 b 的取值, 再根据两类方程的根的关系可证明三根成等差数列.

【小问1详解】

$f(x) = e^x - ax$ 的定义域为 \mathbb{R} , 而 $f'(x) = e^x - a$,

若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 无最小值, 故 $a > 0$.

$g(x) = ax - \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 而 $g'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}$.

当 $x < \ln a$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上为减函数,

当 $x > \ln a$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上为增函数,

故 $f(x)_{\min} = f(\ln a) = a - a \ln a$.

当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $g'(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上为减函数,

当 $x > \frac{1}{a}$ 时, $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上为增函数,

$$\text{故 } g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - \ln \frac{1}{a}.$$

因为 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值,

$$\text{故 } 1 - \ln \frac{1}{a} = a - a \ln a, \text{ 整理得到 } \frac{a-1}{1+a} = \ln a, \text{ 其中 } a > 0,$$

$$\text{设 } g(a) = \frac{a-1}{1+a} - \ln a, a > 0, \text{ 则 } g'(a) = \frac{2}{(1+a)^2} - \frac{1}{a} = \frac{-a^2-1}{a(1+a)^2} \leq 0,$$

故 $g(a)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的减函数, 而 $g(1) = 0$,

$$\text{故 } g(a) = 0 \text{ 的唯一解为 } a = 1, \text{ 故 } \frac{1-a}{1+a} = \ln a \text{ 的解为 } a = 1.$$

综上, $a = 1$.

【小问2详解】

由 (1) 可得 $f(x) = e^x - x$ 和 $g(x) = x - \ln x$ 的最小值为 $1 - \ln 1 = 1 - \ln \frac{1}{1} = 1$.

当 $b > 1$ 时, 考虑 $e^x - x = b$ 的解的个数、 $x - \ln x = b$ 的解的个数.

$$\text{设 } S(x) = e^x - x - b, S'(x) = e^x - 1,$$

当 $x < 0$ 时, $S'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $S'(x) > 0$,

故 $S(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数, 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

$$\text{所以 } S(x)_{\min} = S(0) = 1 - b < 0,$$

$$\text{而 } S(-b) = e^{-b} > 0, S(b) = e^b - 2b,$$

$$\text{设 } u(b) = e^b - 2b, \text{ 其中 } b > 1, \text{ 则 } u'(b) = e^b - 2 > 0,$$

故 $u(b)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数, 故 $u(b) > u(1) = e - 2 > 0$,

故 $S(b) > 0$, 故 $S(x) = e^x - x - b$ 有两个不同的零点, 即 $e^x - x = b$ 的解的个数为 2.

$$\text{设 } T(x) = x - \ln x - b, T'(x) = \frac{x-1}{x},$$

当 $0 < x < 1$ 时, $T'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $T'(x) > 0$,

故 $T(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为减函数, 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数,

所以 $T(x)_{\min} = T(1) = 1 - b < 0$,

而 $T(e^{-b}) = e^{-b} > 0$, $T(e^b) = e^b - 2b > 0$,

$T(x) = x - \ln x - b$ 有两个不同的零点即 $x - \ln x = b$ 的解的个数为 2.

当 $b = 1$, 由 (1) 讨论可得 $x - \ln x = b$ 、 $e^x - x = b$ 仅有一个零点,

当 $b < 1$ 时, 由 (1) 讨论可得 $x - \ln x = b$ 、 $e^x - x = b$ 均无零点,

故若存在直线 $y = b$ 与曲线 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 有三个不同的交点,

则 $b > 1$.

设 $h(x) = e^x + \ln x - 2x$, 其中 $x > 0$, 故 $h'(x) = e^x + \frac{1}{x} - 2$,

设 $s(x) = e^x - x - 1$, $x > 0$, 则 $s'(x) = e^x - 1 > 0$,

故 $s(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 故 $s(x) > s(0) = 0$ 即 $e^x > x + 1$,

所以 $h'(x) > x + \frac{1}{x} - 1 \geq 2 - 1 > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

而 $h(1) = e - 2 > 0$, $h(\frac{1}{e^3}) = e^{\frac{1}{e^3}} - 3 - \frac{2}{e^3} < e - 3 - \frac{2}{e^3} < 0$,

故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有且只有一个零点 x_0 , $\frac{1}{e^3} < x_0 < 1$ 且:

当 $0 < x < x_0$ 时, $h(x) < 0$ 即 $e^x - x < x - \ln x$ 即 $f(x) < g(x)$,

当 $x > x_0$ 时, $h(x) > 0$ 即 $e^x - x > x - \ln x$ 即 $f(x) > g(x)$,

因此若存在直线 $y = b$ 与曲线 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 有三个不同的交点,

故 $b = f(x_0) = g(x_0) > 1$,

此时 $e^x - x = b$ 有两个不同的零点 $x_1, x_0 (x_1 < 0 < x_0)$,

此时 $x - \ln x = b$ 有两个不同的零点 $x_0, x_4 (0 < x_0 < 1 < x_4)$,

故 $e^{x_1} - x_1 = b$, $e^{x_0} - x_0 = b$, $x_4 - \ln x_4 - b = 0$, $x_0 - \ln x_0 - b = 0$

所以 $x_4 - b = \ln x_4$ 即 $e^{x_4 - b} = x_4$ 即 $e^{x_4 - b} - (x_4 - b) - b = 0$,

故 $x_4 - b$ 为方程 $e^x - x = b$ 的解, 同理 $x_0 - b$ 也为方程 $e^x - x = b$ 的解

又 $e^{x_1} - x_1 = b$ 可化为 $e^{x_1} = x_1 + b$ 即 $x_1 - \ln(x_1 + b) = 0$ 即 $(x_1 + b) - \ln(x_1 + b) - b = 0$,

故 $x_1 + b$ 为方程 $x - \ln x = b$ 的解, 同理 $x_0 + b$ 也为方程 $x - \ln x = b$ 的解,

所以 $\{x_1, x_0\} = \{x_0 - b, x_4 - b\}$, 而 $b > 1$,

$$\text{故} \begin{cases} x_0 = x_4 - b \\ x_1 = x_0 - b \end{cases} \text{即 } x_1 + x_4 = 2x_0.$$

【点睛】思路点睛：函数的最值问题，往往需要利用导数讨论函数的单调性，此时注意对参数的分类讨论，而不同方程的根的性质，注意利用方程的特征找到两类根之间的关系.