绝密★本科目考试启用前

2022 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷共 5 页，150 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知全集 $U=\{x|-3<x<3\}$，集合 $A=\{x|-2<x\le 1\}$，则 $\complement_U A=$（　　）

A. $(-2,1]$　　B. $(-3,-2)\cup[1,3)$　　C. $[-2,1)$　　D. $(-3,-2]\cup(1,3)$

【答案】D

【解析】

【分析】利用补集的定义可得正确的选项．

【详解】由补集定义可知：$\complement_U A=\{x\,|-3<x\le -2$ 或 $1<x<3\}$，即 $\complement_U A=(-3,-2]\cup(1,3)$，

故选：D．

2. 若复数 z 满足 $i\cdot z=3-4i$，则 $|z|=$（　　）

A. 1　　B. 5　　C. 7　　D. 25

【答案】B

【解析】

【分析】利用复数四则运算，先求出 z，再计算复数的模．

【详解】由题意有 $z=\dfrac{3-4i}{i}=\dfrac{(3-4i)(-i)}{i\cdot(-i)}=-4-3i$，故 $|z|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$．

故选：B．

3. 若直线 $2x+y-1=0$ 是圆 $(x-a)^2+y^2=1$ 的一条对称轴，则 $a=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. -1

【答案】A

【解析】

【分析】若直线是圆的对称轴，则直线过圆心，将圆心代入直线计算求解．

【详解】由题可知圆心为 $(a,0)$，因为直线是圆的对称轴，所以圆心在直线上，即

$2a+0-1=0$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$．

故选：A．

4. 已知函数$f(x)=\frac{1}{1+2^x}$，则对任意实数x，有（　　）

A. $f(-x)+f(x)=0$

B. $f(-x)-f(x)=0$

C. $f(-x)+f(x)=1$

D. $f(-x)-f(x)=\frac{1}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】直接代入计算，注意通分不要计算错误．

【详解】$f(-x)+f(x)=\frac{1}{1+2^{-x}}+\frac{1}{1+2^x}=\frac{2^x}{1+2^x}+\frac{1}{1+2^x}=1$，故A错误，C正确；

$f(-x)-f(x)=\frac{1}{1+2^{-x}}-\frac{1}{1+2^x}=\frac{2^x}{1+2^x}-\frac{1}{1+2^x}=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$，不是常数，故BD错误；

故选：C．

5. 已知函数$f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$，则（　　）

A. $f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right)$上单调递减

B. $f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}\right)$上单调递增

C. $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$上单调递减

D. $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}\right)$上单调递增

【答案】C

【解析】

【分析】化简得出$f(x)=\cos 2x$，利用余弦型函数的单调性逐项判断可得出合适的选项.

【详解】因为$f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$.

对于A选项，当$-\frac{\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{6}$时，$-\pi<2x<-\frac{\pi}{3}$，则$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right)$上单调递增，A错；

对于B选项，当$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{12}$时，$-\frac{\pi}{2}<2x<\frac{\pi}{6}$，则$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}\right)$上不单调，B错；

对于C选项，当$0<x<\frac{\pi}{3}$时，$0<2x<\frac{2\pi}{3}$，则$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$上单调递减，C对；

对于D选项，当$\frac{\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{12}$时，$\frac{\pi}{2}<2x<\frac{7\pi}{6}$，则$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}\right)$上不单调，D错.

故选：C.

6. 设$\{a_n\}$是公差不为0的无穷等差数列，则“$\{a_n\}$为递增数列”是“存在正整数N_0，当$n>N_0$时，$a_n>0$”的（　　）

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$d\neq 0$，利用等差数列的通项公式结合充分条件、必要条件的定义判断可得出结论.

【详解】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$d\neq 0$，记$[x]$为不超过x的最大整数.

若$\{a_n\}$为单调递增数列，则$d>0$，

若$a_1\geq 0$，则当$n\geq 2$时，$a_n>a_1\geq 0$；若$a_1<0$，则$a_n=a_1+(n-1)d$，

由$a_n=a_1+(n-1)d>0$可得$n>1-\dfrac{a_1}{d}$，取$N_0=\left[1-\dfrac{a_1}{d}\right]+1$，则当$n>N_0$时，$a_n>0$，

所以，“$\{a_n\}$是递增数列”$\Rightarrow$“存在正整数N_0，当$n>N_0$时，$a_n>0$”；

若存在正整数N_0，当$n>N_0$时，$a_n>0$，取$k\in N^*$且$k>N_0$，$a_k>0$，

假设$d<0$，令$a_n=a_k+(n-k)d<0$可得$n>k-\dfrac{a_k}{d}$，且$k-\dfrac{a_k}{d}>k$，

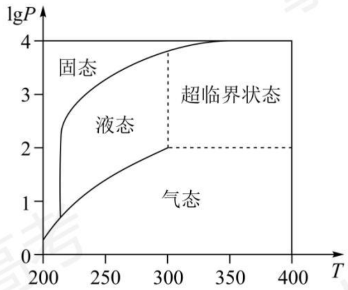
当$n>\left[k-\dfrac{a_k}{d}\right]+1$时，$a_n<0$，与题设矛盾，假设不成立，则$d>0$，即数列$\{a_n\}$是递增数列.

所以，“$\{a_n\}$是递增数列”$\Leftarrow$“存在正整数N_0，当$n>N_0$时，$a_n>0$”.

所以，“$\{a_n\}$是递增数列”是“存在正整数N_0，当$n>N_0$时，$a_n>0$”的充分必要条件.

故选：C.

7. 在北京冬奥会上，国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术，为实现绿色冬奥作出了贡献．如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与T和$\lg P$的关系，其中T表示温度，单位是K；P表示压强，单位是bar．下列结论中正确的是（　　）



A. 当 $T=220$，$P=1026$ 时，二氧化碳处于液态

B. 当 $T=270$，$P=128$ 时，二氧化碳处于气态

C. 当 $T=300$，$P=9987$ 时，二氧化碳处于超临界状态

D. 当 $T=360$，$P=729$ 时，二氧化碳处于超临界状态

【答案】D

【解析】

【分析】根据 T 与 $\lg P$ 的关系图可得正确的选项.

【详解】当 $T=220$，$P=1026$ 时，$\lg P>3$，此时二氧化碳处于固态，故 A 错误.

当 $T=270$，$P=128$ 时，$2<\lg P<3$，此时二氧化碳处于液态，故 B 错误.

当 $T=300$，$P=9987$ 时，$\lg P$ 与 4 非常接近，故此时二氧化碳处于固态，

另一方面，$T=300$ 时对应的是非超临界状态，故 C 错误.

当 $T=360$，$P=729$ 时，因 $2<\lg P<3$，故此时二氧化碳处于超临界状态，故 D 正确.

故选：D

8. 若 $(2x-1)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则 $a_0+a_2+a_4=$（　　）

A. 40　　B. 41　　C. -40　　D. -41

【答案】B

【解析】

【分析】利用赋值法可求 $a_0+a_2+a_4$ 的值.

【详解】令 $x=1$，则 $a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=1$，

令 $x=-1$，则 $a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=(-3)^4=81$，

故 $a_4+a_2+a_0=\dfrac{1+81}{2}=41$，

故选：B.

9. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱长均为6，S 是 $\triangle ABC$ 及其内部的点构成的集合．设集合 $T=\left\{Q\in S\middle|PQ\le 5\right\}$，则 T 表示的区域的面积为（　　）

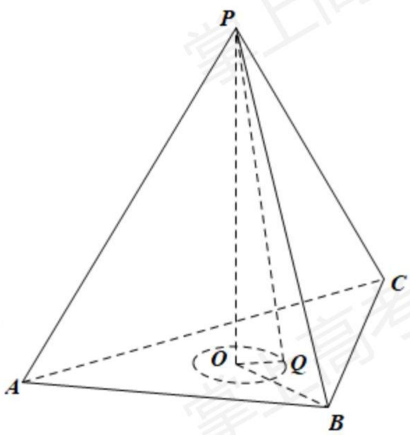
A. $\frac{3\pi}{4}$　　　　B. π　　　　C. 2π　　　　D. 3π

【答案】B

【解析】

【分析】求出以 P 为球心，5 为半径的球与底面 ABC 的截面圆的半径后可求区域的面积.

【详解】



设顶点 P 在底面上的投影为 O，连接 BO，则 O 为三角形 ABC 的中心，

且 $BO=\frac{2}{3}\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，故 $PO=\sqrt{36-12}=2\sqrt{6}$.

因为 $PQ=5$，故 $OQ=1$，

故S的轨迹为以 O 为圆心，1 为半径的圆，

而三角形 ABC 内切圆的圆心为 O，半径为 $\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 36}{3\times 6}=\sqrt{3}>1$，

故S的轨迹圆在三角形 ABC 内部，故其面积为 π

故选：B

10. 在 $\triangle ABC$ 中，$AC=3,BC=4,\angle C=90^{\circ}$．$P$ 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点，且 $PC=1$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是（　　）

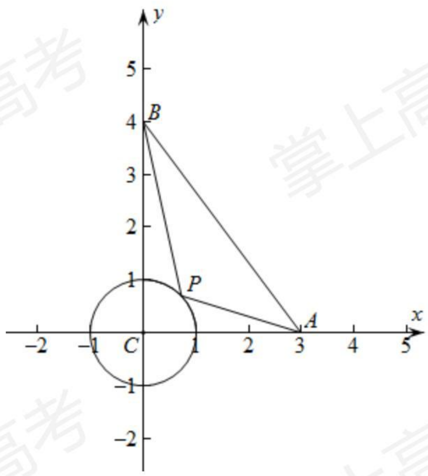
A. $[-5,3]$　　　　B. $[-3,5]$　　　　C. $[-6,4]$　　　　D. $[-4,6]$

【答案】D

【解析】

【分析】依题意建立平面直角坐标系，设$P(\cos\theta,\sin\theta)$，表示出$\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$，根据数量积的坐标表示、辅助角公式及正弦函数的性质计算可得；

【详解】解：依题意如图建立平面直角坐标系，则$C(0,0)$，$A(3,0)$，$B(0,4)$，



因为$PC=1$，所以P在以C为圆心，1为半径的圆上运动，

设$P(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[0,2\pi]$，

所以$\overrightarrow{PA}=(3-\cos\theta,-\sin\theta)$，$\overrightarrow{PB}=(-\cos\theta,4-\sin\theta)$，

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-\cos\theta)\times(3-\cos\theta)+(4-\sin\theta)\times(-\sin\theta)$

$=\cos^2\theta-3\cos\theta-4\sin\theta+\sin^2\theta$

$=1-3\cos\theta-4\sin\theta$

$=1-5\sin(\theta+\varphi)$，其中$\sin\varphi=\frac{3}{5}$，$\cos\varphi=\frac{4}{5}$，

因为$-1\le\sin(\theta+\varphi)\le1$，所以$-4\le1-5\sin(\theta+\varphi)\le6$，即$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\in[-4,6]$；

故选：D

第二部分（非选择题　共110分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

11. 函数$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1-x}$的定义域是________.

【答案】$(-\infty,0)\cup(0,1]$

【解析】

【分析】根据偶次方根的被开方数非负、分母不为零得到方程组，解得即可；

【详解】解：因为$f\left(x\right)=\frac{1}{x}+\sqrt{1-x}$，所以$\begin{cases}1-x\geq 0\\ x\neq 0\end{cases}$，解得$x\leq 1$且$x\neq 0$，

故函数的定义域为$\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,1\right]$；

故答案为：$\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,1\right]$

12. 已知双曲线$y^2+\frac{x^2}{m}=1$的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，则$m=$_________.

【答案】-3

【解析】

【分析】首先可得$m<0$，即可得到双曲线的标准方程，从而得到a、b，再跟渐近线方程得到方程，解得即可；

【详解】解：对于双曲线$y^2+\frac{x^2}{m}=1$，所以$m<0$，即双曲线的标准方程为$y^2-\frac{x^2}{-m}=1$，

则$a=1$，$b=\sqrt{-m}$，又双曲线$y^2+\frac{x^2}{m}=1$的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

所以$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即$\frac{1}{\sqrt{-m}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得$m=-3$；

故答案为：-3

13. 若函数$f(x)=A\sin x-\sqrt{3}\cos x$的一个零点为$\frac{\pi}{3}$，则$A=$________；

$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=$________.

【答案】 ①. 1 ②. $-\sqrt{2}$

【解析】

【分析】先代入零点，求得A的值，再将函数化简为$f(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$，代入自变量$x=\frac{\pi}{12}$，计算即可.

【详解】$\because f(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}A-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$，$\therefore A=1$

$\therefore f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$

$f(\frac{\pi}{12})=2\sin(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{3})=-2\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}$

故答案为：1，$-\sqrt{2}$

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-ax+1, & x<a,\\ (x-2)^2, & x\geq a.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个取值为________；a 的最大值为___________.

【答案】　①. 0（答案不唯一）　②. 1

【解析】

【分析】根据分段函数中的函数 $y=-ax+1$ 的单调性进行分类讨论，可知，$a=0$ 符合条件，$a<0$ 不符合条件，$a>0$ 时函数 $y=-ax+1$ 没有最小值，故 $f(x)$ 的最小值只能取 $y=(x-2)^2$ 的最小值，根据定义域讨论可知 $-a^2+1\geq 0$ 或 $-a^2+1\geq (a-2)^2$，　解得 $0<a\leq 1$.

【详解】解：若 $a=0$ 时，$f(x)=\begin{cases}1 & ,x<0\\ (x-2)^2 & ,x\geq 0\end{cases}$，$\therefore f(x)_{\min}=0$；

若 $a<0$ 时，当 $x<a$ 时，$f(x)=-ax+1$ 单调递增，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，故 $f(x)$ 没有最小值，不符合题目要求；

若 $a>0$ 时，

当 $x<a$ 时，$f(x)=-ax+1$ 单调递减，$f(x)>f(a)=-a^2+1$，

当 $x>a$ 时，$f(x)_{\min}=\begin{cases}0 & (0<a<2)\\ (a-2)^2 & (a\geq 2)\end{cases}$

$\therefore -a^2+1\geq 0$ 或 $-a^2+1\geq (a-2)^2$，

解得 $0<a\leq 1$，

综上可得 $0\leq a\leq 1$；

故答案为：0（答案不唯一），1

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数，其前 n 项和 S_n 满足 $a_n\cdot S_n=9(n=1,2,\cdots)$．给出下列四个结论：

①$\{a_n\}$ 的第 2 项小于 3；　②$\{a_n\}$ 为等比数列；

③$\{a_n\}$ 为递减数列；　④$\{a_n\}$ 中存在小于 $\frac{1}{100}$ 的项.

其中所有正确结论的序号是__________.

【答案】①③④

【解析】

【分析】推导出 $a_n=\frac{9}{a_n}-\frac{9}{a_{n-1}}$，求出 a_1、a_2 的值，可判断①；利用反证法可判断②④；利用数列单调性的定义可判断③.

【详解】由题意可知，$\forall n\in \mathrm{N}^{*}$，$a_n>0$，

当$n=1$时，$a_1^2=9$，可得$a_1=3$；

当$n\ge 2$时，由$S_n=\dfrac{9}{a_n}$可得$S_{n-1}=\dfrac{9}{a_{n-1}}$，两式作差可得$a_n=\dfrac{9}{a_n}-\dfrac{9}{a_{n-1}}$，

所以，$\dfrac{9}{a_{n-1}}=\dfrac{9}{a_n}-a_n$，则$\dfrac{9}{a_2}-a_2=3$，整理可得$a_2^2+3a_2-9=0$，

因为$a_2>0$，解得$a_2=\dfrac{3\sqrt{5}-3}{2}<3$，①对；

假设数列$\{a_n\}$为等比数列，设其公比为q，则$a_2^2=a_1a_3$，即$\left(\dfrac{9}{S_2}\right)^2=\dfrac{81}{S_1S_3}$，

所以，$S_2^2=S_1S_3$，可得$a_1^2(1+q)^2=a_1^2(1+q+q^2)$，解得$q=0$，不合乎题意，

故数列$\{a_n\}$不是等比数列，②错；

当$n\ge 2$时，$a_n=\dfrac{9}{a_n}-\dfrac{9}{a_{n-1}}=\dfrac{9(a_{n-1}-a_n)}{a_na_{n-1}}>0$，可得$a_n<a_{n-1}$，所以，数列$\{a_n\}$为递减数列，③对；

假设对任意的$n\in \mathrm{N}^{*}$，$a_n\ge \dfrac{1}{100}$，则$S_{100000}\ge 100000\times\dfrac{1}{100}=1000$，

所以，$a_{100000}=\dfrac{9}{S_{100000}}\le\dfrac{9}{1000}<\dfrac{1}{100}$，与假设矛盾，假设不成立，④对.

故答案为：①③④.

【点睛】关键点点睛：本题在推断②④的正误时，利用正面推理较为复杂时，可采用反证法来进行推导.

三、解答题共6小愿，共85分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16. 在$\triangle ABC$中，$\sin 2C=\sqrt{3}\sin C$.

（1）求$\angle C$；

（2）若$b=6$，且$\triangle ABC$的面积为$6\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的周长.

【答案】（1）$\dfrac{\pi}{6}$

（2）$6+6\sqrt{3}$

【解析】

【分析】（1）利用二倍角的正弦公式化简可得$\cos C$的值，结合角C的取值范围可求得角C的值；

（2）利用三角形的面积公式可求得a的值，由余弦定理可求得c的值，即可求得$\triangle ABC$的周长.

【小问 1 详解】

解：因为$C\in(0,\pi)$，则$\sin C>0$，由已知可得$\sqrt{3}\sin C=2\sin C\cos C$，

可得$\cos C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因此，$C=\dfrac{\pi}{6}$.

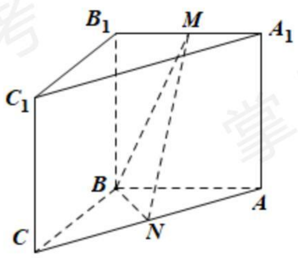
【小问 2 详解】

解：由三角形的面积公式可得$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{3}{2}a=6\sqrt{3}$，解得$a=4\sqrt{3}$.

由余弦定理可得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=48+36-2\times4\sqrt{3}\times6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=12$，$\therefore c=2\sqrt{3}$，

所以，$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=6\sqrt{3}+6$.

17. 如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面BCC_1B_1为正方形，平面$BCC_1B_1\perp$平面ABB_1A_1，$AB=BC=2$，M，N分别为A_1B_1，AC的中点.



（1）求证：$MN\,//$平面BCC_1B_1；

（2）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求直线AB与平面BMN所成角的正弦值.

条件①：$AB\perp MN$；

条件②：$BM=MN$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

【答案】（1）见解析　　（2）见解析

【解析】

【分析】（1）取AB的中点为K，连接MK,NK，可证平面$MKN//$平面CBB_1C_1，从而可证$MN//$平面CBB_1C_1.

（2）选①②均可证明$BB_1\perp$平面ABC，从而可建立如图所示的空间直角坐标系，利用空

间向量可求线面角的正弦值.

【小问 1 详解】

取 AB 的中点为 K，连接 MK,NK，

由三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 可得四边形 ABB_1A_1 为平行四边形，

而 $B_1M=MA_1,BK=KA$，则 $MK//BB_1$，

而 $MK\not\subset$ 平面 CBB_1C_1，$BB_1\subset$ 平面 CBB_1C_1，故 $MK//$ 平面 CBB_1C_1，

而 $CN=NA,BK=KA$，则 $NK//BC$，同理可得 $NK//$ 平面 CBB_1C_1，

而 $NK\cap MK=K,NK,MK\subset$ 平面 MKN，

故平面 $MKN//$ 平面 CBB_1C_1，而 $MN\subset$ 平面 MKN，故 $MN//$ 平面 CBB_1C_1，

【小问 2 详解】

因为侧面 CBB_1C_1 为正方形，故 $CB\perp BB_1$，

而 $CB\subset$ 平面 CBB_1C_1，平面 $CBB_1C_1\perp$ 平面 ABB_1A_1，

平面 $CBB_1C_1\cap$ 平面 $ABB_1A_1=BB_1$，故 $CB\perp$ 平面 ABB_1A_1，

因为 $NK//BC$，故 $NK\perp$ 平面 ABB_1A_1，

因为 AB Ì 平面 ABB_1A_1，故 $NK\perp AB$，

若选①，则 $AB\perp MN$，而 $NK\perp AB$，$NK\cap MN=N$，

故 $AB\perp$ 平面 MNK，而 $MK\subset$ 平面 MNK，故 $AB\perp MK$，

所以 $AB\perp BB_1$，而 $CB\perp BB_1$，$CB\cap AB=B$，故 $BB_1\perp$ 平面 ABC，

故可建立如所示的空间直角坐标系，则 $B(0,0,0),A(0,2,0),N(1,1,0),M(0,1,2)$，

故 $\overrightarrow{BA}=(0,2,0),\overrightarrow{BN}=(1,1,0),\overrightarrow{BM}=(0,1,2)$，

设平面 BNM 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BN}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}$，从而 $\begin{cases}x+y=0\\ y+2z=0\end{cases}$，取 $z=-1$，则 $\vec{n}=(-2,2,-1)$，

设直线 AB 与平面 BNM 所成的角为 θ，则

$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AB}\right\rangle\right|=\dfrac{4}{2\times3}=\dfrac{2}{3}$.

若选②，因为 $NK//BC$，故 $NK\perp$ 平面 ABB_1A_1，而 $KM\subset$ 平面 MKN，

故 $NK\perp KM$，而 $B_1M=BK=1,NK=1$，故 $B_1M=NK$，

而 $B_1B=MK=2$，$MB=MN$，故 $\triangle BB_1M\cong\triangle MKN$，

所以$\angle BB_1M=\angle MKN=90^\circ$，故$A_1B_1\perp BB_1$，

而$CB\perp BB_1$，$CB\cap AB=B$，故$BB_1\perp$平面ABC，

故可建立如所示的空间直角坐标系，则$B(0,0,0),A(0,2,0),N(1,1,0),M(0,1,2)$，

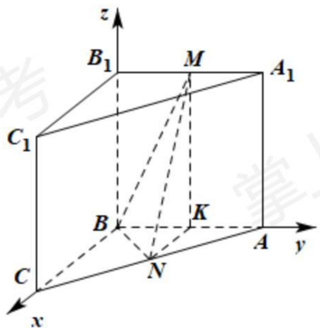
故$\overrightarrow{BA}=(0,2,0),\overrightarrow{BN}=(1,1,0),\overrightarrow{BM}=(0,1,2)$，

设平面BNM的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BN}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}$，从而$\begin{cases}x+y=0\\ y+2z=0\end{cases}$，取$z=-1$，则$\vec{n}=(-2,2,-1)$，

设直线AB与平面BNM所成的角为θ，则

$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AB}\right\rangle\right|=\dfrac{4}{2\times3}=\dfrac{2}{3}$.



18. 在校运动会上，只有甲、乙、丙三名同学参加铅球比赛，比赛成绩达到9.50m以上（含9.50m）的同学将获得优秀奖．为预测获得优秀奖的人数及冠军得主，收集了甲、乙、丙以往的比赛成绩，并整理得到如下数据（单位：m）：

甲：9.80，9.70，9.55，9.54，9.48，9.42，9.40，935，9.30，9.25；

乙：9.78，9.56，9.51，9.36，9.32，9.23；

丙：9.85，9.65，9.20，9.16．

假设用频率估计概率，且甲、乙、丙的比赛成绩相互独立．

（1）估计甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率；

（2）设X是甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的总人数，估计X的数学期望$E(X)$；

（3）在校运动会铅球比赛中，甲、乙、丙谁获得冠军的概率估计值最大？（结论不要求证

明）

【答案】（1）0.4　　（2）$\frac{7}{5}$

（3）丙

【解析】

【分析】(1)　由频率估计概率即可

(2)　求解得 X 的分布列，即可计算出 X 的数学期望.

(3)　计算出各自获得最高成绩的概率，再根据其各自的最高成绩可判断丙夺冠的概率估计值最大.

【小问 1 详解】

由频率估计概率可得

甲获得优秀的概率为 0.4，乙获得优秀的概率为 0.5，丙获得优秀的概率为 0.5，

故答案为 0.4

【小问 2 详解】

设甲获得优秀为事件 A_1,乙获得优秀为事件 A_2，丙获得优秀为事件 A_3

$P(X=0)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=0.6\times0.5\times0.5=\frac{3}{20}$，

$$P(X=1)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$$

$$=0.4\times0.5\times0.5+0.6\times0.5\times0.5+0.6\times0.5\times0.5=\frac{8}{20},$$

$$P(X=2)=P(A_1A_2\overline{A_3})+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3)$$

$$=0.4\times0.5\times0.5+0.4\times0.5\times0.5+0.6\times0.5\times0.5=\frac{7}{20},$$

$P(X=3)=P(A_1A_2A_3)=0.4\times0.5\times0.5=\frac{2}{20}$.

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{20}$

$\therefore E(X)=0\times\frac{3}{20}+1\times\frac{8}{20}+2\times\frac{7}{20}+3\times\frac{2}{20}=\frac{7}{5}$

【小问 3 详解】

丙夺冠概率估计值最大.

因为铅球比赛无论比赛几次就取最高成绩.比赛一次，丙获得 9.85 的概率为$\frac{1}{4}$，甲获得 9.80 的概率为$\frac{1}{10}$，乙获得 9.78 的概率为$\frac{1}{6}$.并且丙的最高成绩是所有成绩中最高的，比赛次数越多，对丙越有利.

19. 已知椭圆：$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个顶点为$A(0,1)$，焦距为$2\sqrt{3}$.

（1）求椭圆E的方程；

（2）过点$P(-2,1)$作斜率为k的直线与椭圆E交于不同的两点B，C，直线AB，AC分别与x轴交于点M，N，当$|MN|=2$时，求k的值.

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

（2）$k=-4$

【解析】

【分析】（1）依题意可得$\begin{cases}b=1\\2c=2\sqrt{3}\\c^2=a^2-b^2\end{cases}$，即可求出$a$，从而求出椭圆方程；

（2）首先表示出直线方程，设$B\left(x_1,y_1\right)$、$C\left(x_2,y_2\right)$，联立直线与椭圆方程，消元列出韦达定理，由直线AB、AC的方程，表示出x_M、x_N，根据$|MN|=\left|x_N-x_M\right|$得到方程，解得即可；

【小问 1 详解】

解：依题意可得$b=1$，$2c=2\sqrt{3}$，又$c^2=a^2-b^2$，

所以$a=2$，所以椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

【小问 2 详解】

解：依题意过点$P\left(-2,1\right)$的直线为$y-1=k\left(x+2\right)$，设$B\left(x_1,y_1\right)$、$C\left(x_2,y_2\right)$，不妨令$-2\le x_1<x_2\le 2$，

由$\begin{cases}y-1=k\left(x+2\right)\\\frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，消去$y$整理得$\left(1+4k^2\right)x^2+\left(16k^2+8k\right)x+16k^2+16k=0$，

所以$\Delta=\left(16k^2+8k\right)^2-4\left(1+4k^2\right)\left(16k^2+16k\right)>0$，解得$k<0$，

所以$x_1+x_2=-\dfrac{16k^2+8k}{1+4k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{16k^2+16k}{1+4k^2}$，

直线AB的方程为$y-1=\dfrac{y_1-1}{x_1}x$，令$y=0$，解得$x_M=\dfrac{x_1}{1-y_1}$，

直线AC的方程为$y-1=\dfrac{y_2-1}{x_2}x$，令$y=0$，解得$x_N=\dfrac{x_2}{1-y_2}$，

所以$|MN|=|x_N-x_M|=\left|\dfrac{x_2}{1-y_2}-\dfrac{x_1}{1-y_1}\right|$

$=\left|\dfrac{x_2}{1-\left[k\left(x_2+2\right)+1\right]}-\dfrac{x_1}{1-\left[k\left(x_1+2\right)+1\right]}\right|$

$=\left|\dfrac{x_2}{-k\left(x_2+2\right)}+\dfrac{x_1}{k\left(x_1+2\right)}\right|$

$=\left|\dfrac{\left(x_2+2\right)x_1-x_2\left(x_1+2\right)}{k\left(x_2+2\right)\left(x_1+2\right)}\right|$

$=\dfrac{2|x_1-x_2|}{|k|\left(x_2+2\right)\left(x_1+2\right)}=2$，

所以$|x_1-x_2|=|k|\left(x_2+2\right)\left(x_1+2\right)$，

即$\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=|k|\left[x_2x_1+2\left(x_2+x_1\right)+4\right]$

即$\sqrt{\left(-\dfrac{16k^2+8k}{1+4k^2}\right)^2-4\times\dfrac{16k^2+16k}{1+4k^2}}=|k|\left[\dfrac{16k^2+16k}{1+4k^2}+2\left(-\dfrac{16k^2+8k}{1+4k^2}\right)+4\right]$

即

$\dfrac{8}{1+4k^2}\sqrt{\left(2k^2+k\right)^2-\left(1+4k^2\right)\left(k^2+k\right)}=\dfrac{|k|}{1+4k^2}\left[16k^2+16k-2\left(16k^2+8k\right)+4\left(1+4k^2\right)\right]$

整理得$8\sqrt{-k}=4|k|$，解得$k=-4$

20. 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x\ln(1+x)$.

（1）求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

（2）设$g(x)=f'(x)$，讨论函数$g(x)$在$[0,+\infty)$上的单调性；

（3）证明：对任意的$s,t\in(0,+\infty)$，有$f(s+t)>f(s)+f(t)$.

【答案】（1）$y=x$

（2）$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增.

（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）先求出切点坐标，在由导数求得切线斜率，即得切线方程；

（2）在求一次导数无法判断的情况下，构造新的函数，再求一次导数，问题即得解；

（3）令 $m(x)=f(x+t)-f(x)$，$(x,t>0)$，即证 $m(x)>m(0)$，由第二问结论可知 $m(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，即得证.

【小问 1 详解】

解：因为 $f(x)=e^{x}\ln(1+x)$，所以 $f(0)=0$，

即切点坐标为 $(0,0)$，

又 $f'(x)=e^{x}(\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x})$，

∴切线斜率 $k=f'(0)=1$

∴切线方程为：$y=x$

【小问 2 详解】

解：因为 $g(x)=f'(x)=e^{x}(\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x})$，

所以 $g'(x)=e^{x}(\ln(1+x)+\dfrac{2}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^{2}})$，

令 $h(x)=\ln(1+x)+\dfrac{2}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^{2}}$，

则 $h'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2}{(1+x)^{2}}+\dfrac{2}{(1+x)^{3}}=\dfrac{x^{2}+1}{(1+x)^{3}}>0$，

∴ $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

∴ $h(x)\geq h(0)=1>0$

∴ $g'(x)>0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

∴ $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

【小问 3 详解】

解：原不等式等价于 $f(s+t)-f(s)>f(t)-f(0)$，

令 $m(x)=f(x+t)-f(x)$，$(x,t>0)$，

即证 $m(x)>m(0)$，

∵ $m(x)=f(x+t)-f(x)=e^{x+t}\ln(1+x+t)-e^{x}\ln(1+x)$，

$m'(x)=e^{x+t}\ln(1+x+t)+\dfrac{e^{x+t}}{1+x+t}-e^{x}\ln(1+x)-\dfrac{e^{x}}{1+x}=g(x+t)-g(x)$，

由（2）知 $g(x)=f'(x)=\mathrm{e}^{x}(\ln(1+x)+\frac{1}{1+x})$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上单调递增，

$\therefore g(x+t)>g(x)$，

$\therefore m'(x)>0$

$\therefore m(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，又因为 $x,t>0$，

$\therefore m(x)>m(0)$，所以命题得证.

21. 已知 $Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为有穷整数数列．给定正整数 m，若对任意的 $n\in\{1,2,\cdots,m\}$，在 Q 中存在 $a_i,a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_{i+j}\,(j\geq 0)$，使得 $a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+j}=n$，则称 Q 为 $m-$连续可表数列.

（1）判断 $Q:2,1,4$ 是否为 $5-$连续可表数列？是否为 $6-$连续可表数列？说明理由；

（2）若 $Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为 $8-$连续可表数列，求证：k 的最小值为 4；

（3）若 $Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为 $20-$连续可表数列，且 $a_1+a_2+\cdots+a_k<20$，求证：$k\geq 7$.

【答案】（1）是 $5-$连续可表数列；不是 $6-$连续可表数列.

（2）证明见解析．　　（3）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）直接利用定义验证即可；

（2）先考虑 $k\leq 3$ 不符合，再列举一个 $k=4$ 合题即可；

（3）$k\leq 5$ 时，根据和的个数易得显然不行，再讨论 $k=6$ 时，由 $a_1+a_2+\cdots+a_6<20$ 可知里面必然有负数，再确定负数只能是 -1，然后分类讨论验证不行即可.

【小问 1 详解】

$a_2=1$，$a_1=2$，$a_1+a_2=3$，$a_3=4$，$a_2+a_3=5$，所以 Q 是 $5-$连续可表数列；易知，不存在 i,j 使得 $a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+j}=6$，所以 Q 不是 $6-$连续可表数列.

【小问 2 详解】

若 $k\leq 3$，设为 $Q:a,b,c$，则至多 $a+b,b+c,a+b+c,a,b,c$，6 个数字，没有 8 个，矛盾；

当 $k=4$ 时，数列 $Q:1,4,1,2$，满足 $a_1=1$，$a_4=2$，$a_3+a_4=3$，$a_2=4$，$a_1+a_2=5$，

$a_1+a_2+a_3=6$，$a_2+a_3+a_4=7$，$a_1+a_2+a_3+a_4=8$，　$\therefore k_{\min}=4$.

【小问 3 详解】

$Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$，若 $i=j$ 最多有 k 种，若 $i\neq j$，最多有 C_k^2 种，所以最多有

$k+\mathrm{C}_k^2=\frac{k\left(k+1\right)}{2}$ 种，

若 $k \le 5$，则 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 至多可表 $\dfrac{5(5+1)}{2}=15$ 个数，矛盾,

从而若 $k<7$,则 $k=6$，a,b,c,d,e,f 至多可表 $\dfrac{6(6+1)}{2}=21$ 个数，

而 $a+b+c+d+e+f<20$，所以其中有负的，从而 a,b,c,d,e,f 可表 1~20 及那个负数（恰 21 个），这表明 $a\sim f$ 中仅一个负的，没有 0，且这个负的在 $a\sim f$ 中绝对值最小，同时 $a\sim f$ 中没有两数相同,设那个负数为 $-m(m\ge 1)$ ，

则所有数之和 $\ge m+1+m+2+\cdots+m+5-m=4m+15$，$4m+15\le 19\Rightarrow m=1$，

$\therefore \{a,b,c,d,e,f\}=\{-1,2,3,4,5,6\}$，再考虑排序，排序中不能有和相同，否则不足 20 个，

$\because 1=-1+2$ （仅一种方式），

$\therefore -1$ 与 2 相邻，

若 -1 不在两端,则"$\underline{x}$, -1, 2, __, __, __"形式，

若 $x=6$，则 $5=6+(-1)$（有 2 种结果相同，方式矛盾），

$\therefore x\ne 6$， 同理 $x\ne 5,4,3$ ，故 -1 在一端，不妨为"$\underline{-1}$, 2, $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$"形式，

若 $A=3$,则 $5=2+3$ （有 2 种结果相同，矛盾），$A=4$ 同理不行，

$A=5$，则 $6=-1+2+5$ （有 2 种结果相同，矛盾），从而 $A=6$，

由于 $7=-1+2+6$,由表法唯一知 3,4 不相邻,、

故只能 $-1,2,6,3,5,4$，①或 $-1,2,6,4,5,3$，②

这 2 种情形，

对①：$9=6+3=5+4$，矛盾，

对②：$8=2+6=5+3$，也矛盾，综上 $k\ne 6$

$\therefore k\ge 7$．

【点睛】关键点睛，先理解题意，是否为 $m-$ 可表数列核心就是是否存在连续的几项（可以是一项）之和能表示从 1 到 m 中间的任意一个值．本题第二问 $k\le 3$ 时，通过和值可能个数否定 $k\le 3$；第三问先通过和值的可能个数否定 $k\le 5$，再验证 $k=6$ 时，数列中的几项如果符合必然是 $\{-1,2,3,4,5,6\}$ 的一个排序，可验证这组数不合题.