绝密★启用前

2022年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上，并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目，在规定的位置贴好条形码.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上、写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共**12**小题，每小题**5**分，共**60**分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\},B=\left\{x \middle| 0\le x<\dfrac{5}{2}\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{0,1,2\}$　　　　B. $\{-2,-1,0\}$　　　　C. $\{0,1\}$　　　　D. $\{1,2\}$

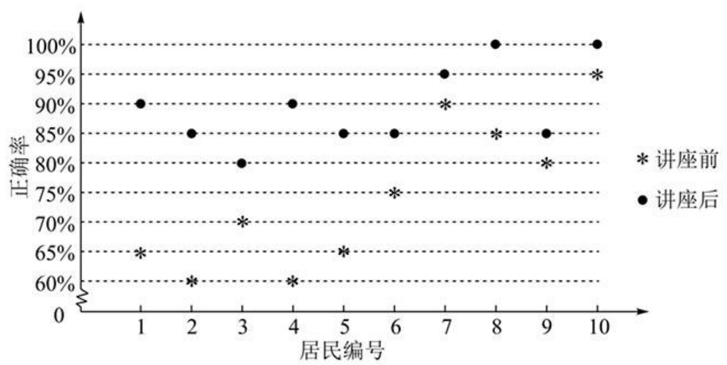
【答案】A

【解析】

因为 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$， $B=\left\{x \middle| 0\le x<\dfrac{5}{2}\right\}$，所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$.

故选：A.

2. 某社区通过公益讲座以普及社区居民的垃圾分类知识．为了解讲座效果，随机抽取10位社区居民，让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷，这10位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图：



则（　　）

A. 讲座前问卷答题的正确率的中位数小于70%

B. 讲座后问卷答题的正确率的平均数大于85%

C. 讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差

D. 讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

【答案】B

【解析】

讲座前中位数为$\frac{70\%+75\%}{2}>70\%$,所以A错；

讲座后问卷答题的正确率只有一个是80%,4个85%,剩下全部大于等于90%,所以讲座后问卷答题的正确率的平均数大于85%,所以B对；

讲座前问卷答题的正确率更加分散,所以讲座前问卷答题的正确率的标准差大于讲座后正确率的标准差,所以C错；

讲座后问卷答题的正确率的极差为$100\%-80\%=20\%$，

讲座前问卷答题 正确率的极差为$95\%-60\%=35\%>20\%$,所以D错.

故选:B

3. 若$z=1+\mathrm{i}$．则$|\mathrm{i}z+3\overline{z}|=$（　　）

A. $4\sqrt{5}$　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{2}$

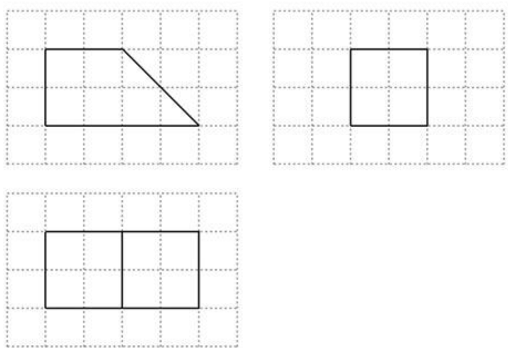
【答案】D

【解析】

因为$z=1+\mathrm{i}$，所以$\mathrm{i}z+3\overline{z}=\mathrm{i}(1+\mathrm{i})+3(1-\mathrm{i})=2-2\mathrm{i}$，所以$|\mathrm{i}z+3\overline{z}|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$．

故选：D.

4. 如图，网格纸上绘制的是一个多面体的三视图，网格小正方形的边长为1，则该多面体的体积为（　　）

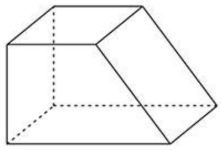


A. 8　　B. 12　　C. 16　　D. 20

【答案】B

【解析】

由三视图还原几何体，如图，



则该直四棱柱的体积$V=\frac{2+4}{2}\times 2\times 2=12$.

故选：B.

5. 将函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$的图像向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度后得到曲线$C$，若$C$关于$y$轴对称，则$\omega$的最小值是（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　　　B. $\frac{1}{4}$　　　　C. $\frac{1}{3}$　　　　D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】

由题意知：曲线C为$y=\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin(\omega x+\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3})$，又$C$关于$y$轴对称，则

$\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

解得$\omega=\frac{1}{3}+2k,k\in\mathbf{Z}$，又$\omega>0$，故当$k=0$时，$\omega$的最小值为$\frac{1}{3}$.

故选：C.

6. 从分别写有1，2，3，4，5，6的6张卡片中无放回随机抽取2张，则抽到的2张卡片上的数字之积是4的倍数的概率为（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　　　B. $\frac{1}{3}$　　　　C. $\frac{2}{5}$　　　　D. $\frac{2}{3}$

【答案】C

【解析】

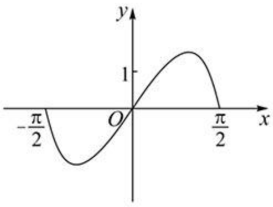
从6张卡片中无放回抽取2张，共有

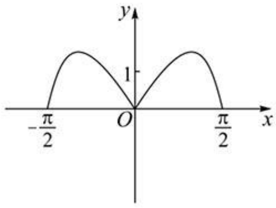
$(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)$ 15种情况，

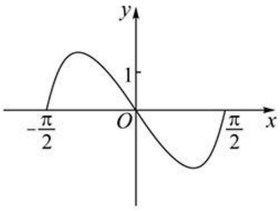
其中数字之积为4的倍数的有$(1,4),(2,4),(2,6),(3,4),(4,5),(4,6)$ 6种情况，故概率为$\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

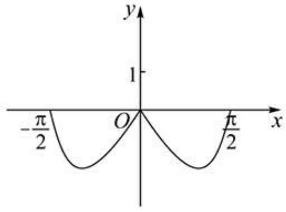
故选：C.

7. 函数 $y=\left(3^{x}-3^{-x}\right)\cos x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【解析】

令 $f\left(x\right)=\left(3^{x}-3^{-x}\right)\cos x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，

则 $f\left(-x\right)=\left(3^{-x}-3^{x}\right)\cos\left(-x\right)=-\left(3^{x}-3^{-x}\right)\cos x=-f\left(x\right)$，

所以 $f\left(x\right)$ 为奇函数，排除 BD；

又当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$3^{x}-3^{-x}>0,\cos x>0$，所以 $f\left(x\right)>0$，排除 C.

故选：A.

8. 当 $x=1$ 时，函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}$ 取得最大值 -2，则 $f'(2)=$（　　）

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

【答案】B

【解析】

因为函数 $f\left(x\right)$ 定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，所以依题可知，$f\ \ 1\ \ =-2$，$f'\left(1\right)=0$，而 $f'\left(x\right)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^{2}}$，所以 $b=-2,a-b=0$，即 $a=-2,b=-2$，所以 $f'\left(x\right)=-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^{2}}$，因此函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上递增，在

$\left(1,+\infty\right)$上递减，$x=1$时取最大值，满足题意，即有$f'\left(2\right)=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

故选：B.

9. 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知B_1D与平面$ABCD$和平面AA_1B_1B所成的角均为$30°$，则（　　）

A. $AB=2AD$

B. AB与平面AB_1C_1D所成的角为$30°$

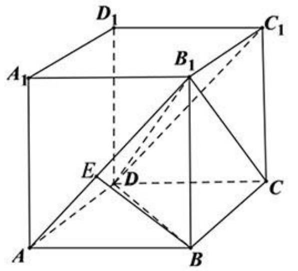
C. $AC=CB_1$

D. B_1D与平面BB_1C_1C所成的角为$45°$

【答案】D

【解析】

如图所示：



不妨设$AB=a,AD=b,AA_1=c$，依题以及长方体的结构特征可知，B_1D与平面$ABCD$所成角为

$\angle B_1DB$，B_1D与平面AA_1B_1B所成角为$\angle DB_1A$，所以$\sin 30^{\circ}=\frac{c}{B_1D}=\frac{b}{B_1D}$，即$b=c$，

$B_1D=2c=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，解得$a=\sqrt{2}c$.

对于A，$AB=a$，$AD=b$，$AB=\sqrt{2}AD$，A错误；

对于B，过B作$BE\perp AB_1$于E，易知$BE\perp$平面AB_1C_1D，所以AB与平面AB_1C_1D所成角为

$\angle BAE$，因为$\tan\angle BAE=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\angle BAE\neq 30^{\circ}$，B错误；

对于C，$AC=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}c$，$CB_1=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2}c$，$AC\neq CB_1$，C错误；

对于D，B_1D与平面BB_1C_1C所成角为$\angle DB_1C$，$\sin\angle DB_1C=\frac{CD}{B_1D}=\frac{a}{2c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，而

$0<\angle DB_1C<90^{\circ}$，所以$\angle DB_1C=45^{\circ}$．D正确．

故选：D.

10. 甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为2π，侧面积分别为$S_{甲}$和$S_{乙}$，体积分别为$V_{甲}$和$V_{乙}$．若$\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=2$，则$\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=$（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{10}$　　D. $\frac{5\sqrt{10}}{4}$

【答案】C

【解析】

设母线长为l，甲圆锥底面半径为r_1，乙圆锥底面圆半径为r_2，

则$\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=\frac{\pi r_1 l}{\pi r_2 l}=\frac{r_1}{r_2}=2$，

所以$r_1=2r_2$，

又$\frac{2\pi r_1}{l}+\frac{2\pi r_2}{l}=2\pi$，

则$\frac{r_1+r_2}{l}=1$，

所以$r_1=\frac{2}{3}l, r_2=\frac{1}{3}l$，

所以甲圆锥的高$h_1=\sqrt{l^2-\frac{4}{9}l^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}l$，

乙圆锥的高$h_2=\sqrt{l^2-\frac{1}{9}l^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}l$，

所以$\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=\frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2}=\frac{\frac{4}{9}l^2\times\frac{\sqrt{5}}{3}l}{\frac{1}{9}l^2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}l}=\sqrt{10}$.

故选：C.

11. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{3}$，$A_1,A_2$分别为$C$的左、右顶点，$B$为$C$的上顶点．若$\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-1$，则$C$的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{16}=1$　　B. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$　　C. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　D. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

【答案】B

【解析】

因为离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{3}$，解得$\frac{b^2}{a^2}=\frac{8}{9}$，$b^2=\frac{8}{9}a^2$，

A_1,A_2分别为C　左右顶点，则$A_1\left(-a,0\right),A_2\left(a,0\right)$，

B为上顶点，所以$B(0,b)$.

所以$\overrightarrow{BA_1}=(-a,-b),\overrightarrow{BA_2}=(a,-b)$，因为$\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-1$

所以$-a^2+b^2=-1$，将$b^2=\frac{8}{9}a^2$代入，解得$a^2=9,b^2=8$，

故椭圆的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$．

故选：B.

12. 已知$9^m=10,a=10^m-11,b=8^m-9$，则（　　）

A. $a>0>b$　　B. $a>b>0$　　C. $b>a>0$　　D. $b>0>a$

【答案】A

【解析】

由$9^m=10$可得$m=\log_9 10=\frac{\lg 10}{\lg 9}>1$，而$\lg 9\lg 11<\left(\frac{\lg 9+\lg 11}{2}\right)^2=\left(\frac{\lg 99}{2}\right)^2<1=(\lg 10)^2$，所以$\frac{\lg 10}{\lg 9}>\frac{\lg 11}{\lg 10}$，即$m>\lg 11$，所以$a=10^m-11>10^{\lg 11}-11=0$．

又$\lg 8\lg 10<\left(\frac{\lg 8+\lg 10}{2}\right)^2=\left(\frac{\lg 80}{2}\right)^2<(\lg 9)^2$，所以$\frac{\lg 9}{\lg 8}>\frac{\lg 10}{\lg 9}$，即$\log_8 9>m$，

所以$b=8^m-9<8^{\log_8 9}-9=0$．综上，$a>0>b$．

故选：A.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量$\vec{a}=(m,3),\vec{b}=(1,m+1)$．若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$m=$____________．

【答案】$-\frac{3}{4}$##-0.75

【解析】

由题意知：$\vec{a}\cdot\vec{b}=m+3(m+1)=0$，解得$m=-\frac{3}{4}$．

故答案为：$-\frac{3}{4}$．

14. 设点M在直线$2x+y-1=0$上，点$(3,0)$和$(0,1)$均在$\odot M$上，则$\odot M$的方程为____________．

【答案】$(x-1)^2+(y+1)^2=5$

【解析】

∵点M在直线$2x+y-1=0$上，

∴设点M为$(a,1-2a)$，又因为点$(3,0)$和$(0,1)$均在$\odot M$上，

∴点M到两点的距离相等且为半径R,

∴$\sqrt{(a-3)^2+(1-2a)^2}=\sqrt{a^2+(-2a)^2}=R$，

$a^2-6a+9+4a^2-4a+1=5a^2$，解得$a=1$，

$\therefore M(1,-1)$，$R=\sqrt{5}$，

$\odot M$ 的方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=5$.

故答案为：$(x-1)^2+(y+1)^2=5$

15. 记双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 e，写出满足条件"直线 $y=2x$ 与 C 无公共点"的 e 的一个值__________.

【答案】2（满足 $1<e\le\sqrt{5}$ 皆可）

【解析】

$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，所以 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，

结合渐近线的特点，只需 $0<\frac{b}{a}\le 2$，即 $\frac{b^2}{a^2}\le 4$，

可满足条件"直线 $y=2x$ 与 C 无公共点"

所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\le\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$，

又因为 $e>1$，所以 $1<e\le\sqrt{5}$，

故答案为：2（满足 $1<e\le\sqrt{5}$ 皆可）

16. 已知 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，$\angle ADB=120^\circ, AD=2, CD=2BD$. 当 $\frac{AC}{AB}$ 取得最小值时，$BD=$________.

【答案】$\sqrt{3}-1$##$-1+\sqrt{3}$

【解析】

设 $CD=2BD=2m>0$，

则在 $\triangle ABD$ 中，$AB^2=BD^2+AD^2-2BD\cdot AD\cos\angle ADB=m^2+4+2m$，

在 $\triangle ACD$ 中，$AC^2=CD^2+AD^2-2CD\cdot AD\cos\angle ADC=4m^2+4-4m$，

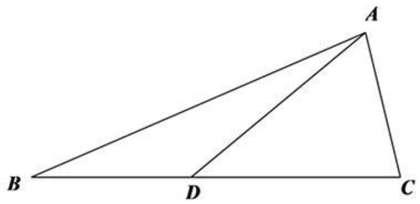
所以 $\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{4m^2+4-4m}{m^2+4+2m}=\frac{4\left(m^2+4+2m\right)-12(1+m)}{m^2+4+2m}=4-\frac{12}{(m+1)+\frac{3}{m+1}}$

$\ge 4-\frac{12}{2\sqrt{(m+1)\cdot\frac{3}{m+1}}}=4-2\sqrt{3}$，

当且仅当 $m+1=\frac{3}{m+1}$ 即 $m=\sqrt{3}-1$ 时，等号成立，

所以当 $\frac{AC}{AB}$ 取最小值时，$m=\sqrt{3}-1$.

故答案为：$\sqrt{3}-1$.



三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17. 甲、乙两城之间的长途客车均由 A 和 B 两家公司运营，为了解这两家公司长途客车的运行情况，随机调查了甲、乙两城之间的 500 个班次，得到下面列联表：

	准点班次数	未准点班次数
A	240	20
B	210	30

（1）根据上表，分别估计这两家公司甲、乙两城之间的长途客车准点的概率；

（2）能否有 90%的把握认为甲、乙两城之间的长途客车是否准点与客车所属公司有关？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P\left(K^2\geqslant k\right)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

【解析】

（1）根据表中数据，A 共有班次 260 次，准点班次有 240 次，

设 A 家公司长途客车准点事件为 M，

则 $P(M)=\dfrac{240}{260}=\dfrac{12}{13}$；

B 共有班次 240 次，准点班次有 210 次，

设 B 家公司长途客车准点事件为 N，

则 $P(N)=\dfrac{210}{240}=\dfrac{7}{8}$.

A家公司长途客车准点的概率为$\frac{12}{13}$；

B家公司长途客车准点的概率为$\frac{7}{8}$．

（2）列联表

	准点班次数	未准点班次数	合计
A	240	20	260
B	210	30	240
合计	450	50	500

$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$=\frac{500\times(240\times30-210\times20)^2}{260\times240\times450\times50}\approx3.205>2.706$，

根据临界值表可知，有90%的把握认为甲、乙两城之间的长途客车是否准点与客车所属公司有关．

18．记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和．已知$\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$．

（1）证明：$\{a_n\}$是等差数列；

（2）若a_4,a_7,a_9成等比数列，求S_n的最小值．

【解析】

（1）因为$\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$，即$2S_n+n^2=2na_n+n$①，

当$n\geq2$时，$2S_{n-1}+(n-1)^2=2(n-1)a_{n-1}+(n-1)$②，

①－②得，$2S_n+n^2-2S_{n-1}-(n-1)^2=2na_n+n-2(n-1)a_{n-1}-(n-1)$，

即$2a_n+2n-1=2na_n-2(n-1)a_{n-1}+1$，

即$2(n-1)a_n-2(n-1)a_{n-1}=2(n-1)$，所以$a_n-a_{n-1}=1$，$n\geq2$且$n\in N^*$，

所以$\{a_n\}$是以1为公差的等差数列．

（2）由（1）可得$a_4=a_1+3$，$a_7=a_1+6$，$a_9=a_1+8$，

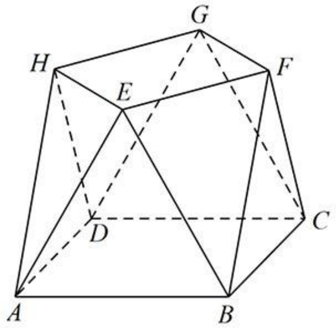
又a_4，a_7，a_9成等比数列，所以$a_7{}^2=a_4\cdot a_9$，

即$(a_1+6)^2=(a_1+3)\cdot(a_1+8)$，解得$a_1=-12$，

所以$a_n=n-13$，所以$S_n=-12n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}n^2-\frac{25}{2}n=\frac{1}{2}\left(n-\frac{25}{2}\right)^2-\frac{625}{8}$，

所以，当$n=12$或$n=13$时$\left(S_n\right)_{\min}=-78$.

19. 小明同学参加综合实践活动，设计了一个封闭的包装盒，包装盒如图所示：底面$ABCD$是边长为8（单位：cm）的正方形，$\triangle EAB,\triangle FBC,\triangle GCD,\triangle HDA$均为正三角形，且它们所在的平面都与平面$ABCD$垂直.

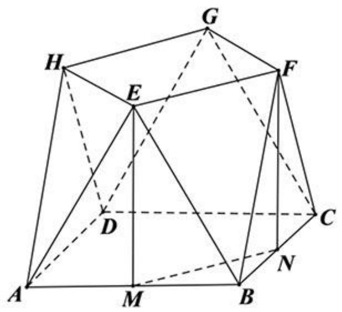


（1）证明：$EF//$平面$ABCD$；

（2）求该包装盒的容积（不计包装盒材料的厚度）.

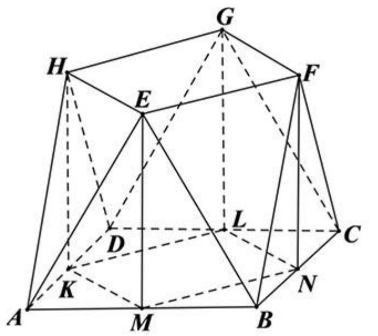
【解析】

（1）如图所示：



，

分别取AB,BC的中点M,N，连接MN，因为$\triangle EAB,\triangle FBC$为全等的正三角形，所以$EM\perp AB,FN\perp BC$，$EM=FN$，又平面$EAB\perp$平面$ABCD$，平面$EAB\cap$平面$ABCD=AB$，$EM\subset$平面$EAB$，所以$EM\perp$平面$ABCD$，同理可得$FN\perp$平面$ABCD$，根据线面垂直的性质定理可知$EM//FN$，而$EM=FN$，所以四边形$EMNF$为平行四边形，所以$EF//MN$，又$EF\not\subset$平面$ABCD$，$MN\subset$平面$ABCD$，所以$EF//$平面$ABCD$.

（2）如图所示：，

分别取 AD,DC 中点 K,L，由（1）知，$EF//MN$ 且 $EF=MN$，同理有，$HE//KM,HE=KM$，$HG//KL,HG=KL$，$GF//LN,GF=LN$，由平面知识可知，$BD\perp MN$，$MN\perp MK$，$KM=MN=NL=LK$，所以该几何体的体积等于长方体 $KMNL-EFGH$ 的体积加上四棱锥 $B-MNFE$ 体积的4倍.

因为 $MN=NL=LK=KM=4\sqrt{2}$，$EM=8\sin 60^\circ=4\sqrt{3}$，点 B 到平面 $MNFE$ 的距离即为点 B 到直线 MN 的距离 d，$d=2\sqrt{2}$，所以该几何体的体积

$$V=\left(4\sqrt{2}\right)^2\times 4\sqrt{3}+4\times\frac{1}{3}\times 4\sqrt{2}\times 4\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}=128\sqrt{3}+\frac{256}{3}\sqrt{3}=\frac{640}{3}\sqrt{3}.$$

20. 已知函数 $f(x)=x^3-x,g(x)=x^2+a$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$ 处的切线也是曲线 $y=g(x)$ 的切线.

（1）若 $x_1=-1$，求 a；

（2）求 a 的取值范围.

【解析】

（1）由题意知，$f(-1)=-1-(-1)=0$，$f'(x)=3x^2-1$，$f'(-1)=3-1=2$，则 $y=f(x)$ 在点 $\left(-1,0\right)$ 处的切线方程为 $y=2(x+1)$，

即 $y=2x+2$，设该切线与 $g(x)$ 切于点 $\left(x_2,g\left(x_2\right)\right)$，$g'(x)=2x$，则 $g'\left(x_2\right)=2x_2=2$，解得 $x_2=1$，则 $g(1)=1+a=2+2$，解得 $a=3$；

（2）$f'(x)=3x^2-1$，则 $y=f(x)$ 在点 $\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$ 处的切线方程为 $y-\left(x_1^3-x_1\right)=\left(3x_1^2-1\right)\left(x-x_1\right)$，整理得 $y=\left(3x_1^2-1\right)x-2x_1^3$，

设该切线与 $g(x)$ 切于点 $\left(x_2,g\left(x_2\right)\right)$，$g'(x)=2x$，则 $g'\left(x_2\right)=2x_2$，则切线方程为 $y-\left(x_2^2+a\right)=2x_2\left(x-x_2\right)$，整理得 $y=2x_2x-x_2^2+a$，

则$\begin{cases}3x_1^2-1=2x_2\\-2x_1^3=-x_2^2+a\end{cases}$，整理得$a=x_2^2-2x_1^3=\left(\dfrac{3x_1^2}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2-2x_1^3=\dfrac{9}{4}x_1^4-2x_1^3-\dfrac{3}{2}x_1^2+\dfrac{1}{4}$，

令$h(x)=\dfrac{9}{4}x^4-2x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{4}$，则$h'(x)=9x^3-6x^2-3x=3x(3x+1)(x-1)$，令$h'(x)>0$，解得

$-\dfrac{1}{3}<x<0$或$x>1$，

令$h'(x)<0$，解得$x<-\dfrac{1}{3}$或$0<x<1$，则x变化时，$h'(x),h(x)$的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$	$-\dfrac{1}{3}$	$\left(-\dfrac{1}{3},0\right)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$\dfrac{5}{27}$	↗	$\dfrac{1}{4}$	↘	-1	↗

则$h(x)$的值域为$[-1,+\infty)$，故a的取值范围为$[-1,+\infty)$.

21. 设抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，点$D(p,0)$，过F的直线交C于M，N两点．当直线MD垂直于x轴时，$|MF|=3$．

（1）求C的方程；

（2）设直线MD,ND与C的另一个交点分别为A，B，记直线MN,AB的倾斜角分别为α,β．当$\alpha-\beta$取得最大值时，求直线AB的方程．

【解析】

（1）抛物线的准线为$x=-\dfrac{p}{2}$，当MD与x轴垂直时，点M的横坐标为p，

此时$|MF|=p+\dfrac{p}{2}=3$，所以$p=2$，

所以抛物线C的方程为$y^2=4x$；

（2）设$M\left(\dfrac{y_1^2}{4},y_1\right),N\left(\dfrac{y_2^2}{4},y_2\right),A\left(\dfrac{y_3^2}{4},y_3\right),B\left(\dfrac{y_4^2}{4},y_4\right)$，直线$MN:x=my+1$，

由$\begin{cases}x=my+1\\y^2=4x\end{cases}$可得$y^2-4my-4=0$，$\Delta>0,y_1y_2=-4$，

由斜率公式可得$k_{MN}=\dfrac{y_1-y_2}{\dfrac{y_1^2}{4}-\dfrac{y_2^2}{4}}=\dfrac{4}{y_1+y_2}$，$k_{AB}=\dfrac{y_3-y_4}{\dfrac{y_3^2}{4}-\dfrac{y_4^2}{4}}=\dfrac{4}{y_3+y_4}$，

直线 $MD: x=\frac{x_1-2}{y_1}\cdot y+2$，代入抛物线方程可得 $y^2-\frac{4\left(x_1-2\right)}{y_1}\cdot y-8=0$，

$\Delta>0, y_1y_3=-8$，所以 $y_3=2y_2$，同理可得 $y_4=2y_1$，

所以 $k_{AB}=\frac{4}{y_3+y_4}=\frac{4}{2\left(y_1+y_2\right)}=\frac{k_{MN}}{2}$

又因为直线 MN、AB 的倾斜角分别为 α,β，

所以 $k_{AB}=\tan\beta=\frac{k_{MN}}{2}=\frac{\tan\alpha}{2}$，

若要使 $\alpha-\beta$ 最大，则 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

设 $k_{MN}=2k_{AB}=2k>0$，则 $\tan\left(\alpha-\beta\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{k}{1+2k^2}=\frac{1}{\frac{1}{k}+2k}\le\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{k}\cdot 2k}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

当且仅当 $\frac{1}{k}=2k$ 即 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立，

所以当 $\alpha-\beta$ 最大时，$k_{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，设直线 $AB: x=\sqrt{2}y+n$，

代入抛物线方程可得 $y^2-4\sqrt{2}y-4n=0$，

$\Delta>0, y_3y_4=-4n=4y_1y_2=-16$，所以 $n=4$，

所以直线 $AB: x=\sqrt{2}y+4$.

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{2+t}{6}\\ y=\sqrt{t}\end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=-\frac{2+s}{6}\\ y=-\sqrt{s}\end{cases}$（$s$ 为参数）.

（1）写出 C_1 的普通方程；

（2）以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_3 的极坐标方程为 $2\cos\theta-\sin\theta=0$，求 C_3 与 C_1 交点的直角坐标，及 C_3 与 C_2 交点的直角坐标.

【解析】

（1）因为$x=\dfrac{2+t}{6}$，$y=\sqrt{t}$，所以$x=\dfrac{2+y^2}{6}$，即C_1 普通方程为$y^2=6x-2\left(y\geq 0\right)$.

（2）因为$x=-\dfrac{2+s}{6}, y=-\sqrt{s}$，所以$6x=-2-y^2$，即$C_2$的普通方程为$y^2=-6x-2\left(y\leq 0\right)$，

由$2\cos\theta-\sin\theta=0\Rightarrow 2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta=0$，即$C_3$的普通方程为$2x-y=0$.

联立$\begin{cases}y^2=6x-2\left(y\geq 0\right)\\ 2x-y=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$，即交点坐标为$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，$\left(1,2\right)$；

联立$\begin{cases}y^2=-6x-2\left(y\leq 0\right)\\ 2x-y=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ y=-1\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1\\ y=-2\end{cases}$，即交点坐标 $\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)$，$\left(-1,-2\right)$.

[选修 4-5：不等式选讲]

23. 已知a，b，c均为正数，且$a^2+b^2+4c^2=3$，证明：

（1）$a+b+2c\leq 3$；

（2）若$b=2c$，则$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\geq 3$.

【解析】

（1）证明：由柯西不等式有$\left[a^2+b^2+\left(2c\right)^2\right]\left(1^2+1^2+1^2\right)\geq\left(a+b+2c\right)^2$，

所以$a+b+2c\leq 3$，

当且仅当$a=b=2c=1$时，取等号，

所以$a+b+2c\leq 3$；

（2）证明：因为$b=2c$，$a>0$，$b>0$，$c>0$，由（1）得$a+b+2c=a+4c\leq 3$，

即$0<a+4c\leq 3$，所以$\dfrac{1}{a+4c}\geq\dfrac{1}{3}$，

由权方和不等式知$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1^2}{a}+\dfrac{2^2}{4c}\geq\dfrac{\left(1+2\right)^2}{a+4c}=\dfrac{9}{a+4c}\geq 3$，

当且仅当$\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{4c}$，即$a=1$，$c=\dfrac{1}{2}$时取等号，

所以$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\geq 3$.