

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，总共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集  $U=\{1,2,3,4,5\}$ , 集合  $M=\{1,2\}$ ,  $N=\{3,4\}$ , 则  $C_U(M \cup N) =$

- A.  $\{5\}$
- B.  $\{1,2\}$
- C.  $\{3,4\}$
- D.  $\{1,2,3,4\}$

2. 设  $iz=4+3i$ , 则  $z$  等于

- A.  $-3-4i$
- B.  $-3+4i$
- C.  $3-4i$
- D.  $3+4i$

3. 已知命题  $p: \exists x \in \mathbb{R}, \sin x < 1$ , 命题  $q: \forall x \in \mathbb{R}, e^{|x|} \geq 1$ , 则下列命题中为真命题的是

- A.  $p \wedge q$
- B.  $\neg p \wedge q$
- C.  $p \wedge \neg q$
- D.  $\neg(p \vee q)$

4. 函数  $f(x) = \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3}$  的最小正周期和最大值分别是

- A.  $3\pi$  和  $\sqrt{2}$
- B.  $3\pi$  和 2
- C.  $6\pi$  和  $\sqrt{2}$
- D.  $6\pi$  和 2

5. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + y \geq 4 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 3 \end{cases}$ , 则  $z=3x+y$  的最小值为

- A.18
- B.10
- C.6
- D.4

6.  $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{5\pi}{12} =$

- A.  $\frac{1}{2}$
- B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 在区间  $(0, \frac{1}{2})$  随机取 1 个数，则取到的数小于  $\frac{1}{3}$  的概率为

- A.  $\frac{3}{4}$
- B.  $\frac{2}{3}$
- C.  $\frac{1}{3}$
- D.  $\frac{1}{6}$

8. 下列函数中最小值为 4 的是

- A.  $y = x^2 + 2x + 4$
- B.  $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$
- C.  $y = 2^x + 2^{2-x}$
- D.  $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$

9. 设函数  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ，则下列函数中为奇函数的是

- A.  $f(x-1) - 1$
- B.  $f(x-1) + 1$
- C.  $f(x+1) - 1$
- D.  $f(x+1) + 1$

10.在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ,  $P$  为  $B_1D_1$  的重点, 则直线  $PB$  与  $AD_1$  所成的角为

- A.  $\frac{\pi}{2}$
- B.  $\frac{\pi}{3}$
- C.  $\frac{\pi}{4}$
- D.  $\frac{\pi}{6}$

11.设  $B$  是椭圆  $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$  的上顶点, 点  $P$  在  $C$  上, 则  $|PB|$  的最大值为

- A.  $\frac{5}{2}$
- B.  $\sqrt{6}$
- C.  $\sqrt{5}$
- D. 2

12.设  $a \neq 0$ , 若  $x = a$  为函数  $f(x) = a(x - a)^2(x - b)$  的极大值点, 则

- A.  $a < b$
- B.  $a > b$
- C.  $ab < a^2$
- D.  $ab > a^2$

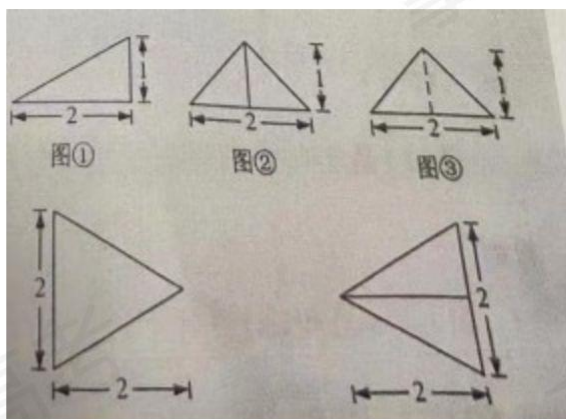
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分

13.已知向量  $a = (2, 5), b = (\lambda, 4)$ , 若  $\vec{a} // \vec{b}$ , 则  $\lambda =$  \_\_\_\_\_.

14.双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$  的右焦点到直线  $x + 2y - 8 = 0$  的距离为 \_\_\_\_\_.

15.记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 面积为  $\sqrt{3}$ ,  $B = 60^\circ, a^2 + c^2 = 3ac$ , 则  $b =$  \_\_\_\_\_.

16.以图①为正视图, 在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图, 组成某个三棱锥的三视图, 则所选侧视图和俯视图的编号依次为 \_\_\_\_\_ (写出符合要求的一组答案即可)。



### 三、解答题

#### (一) 必考题

#### 17. (12分)

某厂研制了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品，得到各件产品该项指标数据如下：

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别为 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ ，样本方差分别记为 $S_1^2$ 和 $S_2^2$ .

(1) 求 $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $S_1^2$ ,  $S_2^2$

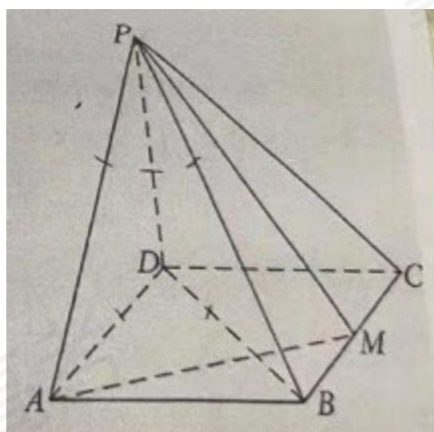
(2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高(如果 $\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{10}}$ , 则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高, 否则不认为有显著提高).

#### 18. (12分)

如图，四棱锥 P-ABCD 的底面是矩形， $PD \perp$  底面 ABCD，M 为 BC 的中点，且  $PB \perp AM$ .

(1) 证明：平面 PAM  $\perp$  平面 PBD；

(2) 若  $PD = DC = 1$ ，求四棱锥 P-ADCD 的体积.



19.(12分)

设 $\{a_n\}$ 是首项为1的等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{na_n}{3}$ , 已知 $a_1, 3a_2, 9a_3$ 成等差数列.

(1)求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2)记 $S_n$ 和 $T_n$ 分别为 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和.证明:  $T_n < \frac{S_n}{2}$ .

20.(12分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px(p > 0)$ 的焦点 $F$ 到准线的距离为2.

(1)求 $C$ 的方程.

(2)已知 $O$ 为坐标原点, 点 $P$ 在 $C$ 上, 点 $Q$ 满足 $\overrightarrow{PQ} = 9\overrightarrow{QF}$ , 求直线 $OQ$ 斜率的最大值.

21.(12分)

已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$ .

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)求曲线 $y = f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y = f(x)$ 的公共点的坐标.

(二) 选考题: 共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22.[选修4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 $xOy$ 中,  $\odot C$ 的圆心为 $C(2,1)$ , 半径为1.

(1) 写出 $\odot C$ 的一个参数方程。

(2) 过点 $F(4,1)$ 作 $\odot C$ 的两条切线，以坐标原点为极点， $x$ 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求这两条切线的极坐标方程。

23.[选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x - a| + |x + 3|$ .

(1) 当 $a = 1$  时，求不等式 $f(x) \geq 6$  的解集；

(2) 若 $f(x) > -a$ ，求 $a$ 的取值范围.