

2021年普通高等学校招生全国统一考试

乙卷 理科数学

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $2(z + \bar{z}) + 3(z - \bar{z}) = 4 + 6i$ ，则 $z =$ ()

- A. $1 - 2i$ B. $1 + 2i$ C. $1 + i$ D. $1 - i$

【答案】C

【解析】

【分析】设 $z = a + bi$ ，利用共轭复数的定义以及复数的加减法可得出关于 a 、 b 的等式，解出这两个未知数的值，即可得出复数 z 。

【详解】设 $z = a + bi$ ，则 $\bar{z} = a - bi$ ，则 $2(z + \bar{z}) + 3(z - \bar{z}) = 4a + 6bi = 4 + 6i$ ，

所以， $\begin{cases} 4a = 4 \\ 6b = 6 \end{cases}$ ，解得 $a = b = 1$ ，因此， $z = 1 + i$ 。

故选：C。

2. 已知集合 $S = \{s | s = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$ ， $T = \{t | t = 4n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$ ，则 $S \cap T =$ ()

- A. \emptyset B. S C. T D. \mathbf{Z}

【答案】C

【解析】

【分析】分析可得 $T \subseteq S$ ，由此可得出结论。

【详解】任取 $t \in T$ ，则 $t = 4n + 1 = 2 \cdot (2n) + 1$ ，其中 $n \in \mathbf{Z}$ ，所以， $t \in S$ ，故 $T \subseteq S$ ，

因此， $S \cap T = T$ 。

故选：C。

3. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, \sin x < 1$ ；命题 $q: \forall x \in \mathbf{R}, e^{|x|} \geq 1$ ，则下列命题中为真命题的是 ()

- A. $p \wedge q$ B. $\neg p \wedge q$ C. $p \wedge \neg q$ D. $\neg(p \vee q)$

【答案】A

【解析】

【分析】由正弦函数的有界性确定命题 p 的真假性，由指数函数的知识确定命题 q 的真假性，由此确定正确选项。

【详解】由于 $\sin 0=0$ ，所以命题 P 为真命题；

由于 $y=e^x$ 在 R 上为增函数， $|x| \geq 0$ ，所以 $e^{|x|} \geq e^0=1$ ，所以命题 q 为真命题；

所以 $P \wedge q$ 真命题， $\neg P \wedge q$ 、 $P \wedge \neg q$ 、 $\neg(P \vee q)$ 为假命题.

故选：A.

4. 设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ ，则下列函数中为奇函数的是（ ）

- A. $f(x-1)-1$ B. $f(x-1)+1$ C. $f(x+1)-1$ D. $f(x+1)+1$

【答案】B

【解析】

【分析】分别求出选项的函数解析式，再利用奇函数的定义即可.

【详解】由题意可得 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}$ ，

对于 A， $f(x-1)-1=\frac{2}{x}-2$ 不是奇函数；

对于 B， $f(x-1)+1=\frac{2}{x}$ 是奇函数；

对于 C， $f(x+1)-1=\frac{2}{x+2}-2$ ，定义域不关于原点对称，不是奇函数；

对于 D， $f(x+1)+1=\frac{2}{x+2}$ ，定义域不关于原点对称，不是奇函数.

故选：B

【点睛】本题主要考查奇函数定义，考查学生对概念的理解，是一道容易题.

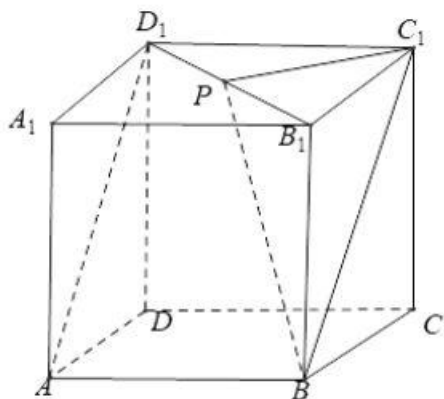
5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， P 为 B_1D_1 的中点，则直线 PB 与 AD_1 所成的角为（ ）

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

【答案】D

【解析】

【分析】平移直线 AD_1 至 BC_1 ，将直线 PB 与 AD_1 所成的角转化为 PB 与 BC_1 所成的角，解三角形即可.



【详解】

如图，连接 BC_1, PC_1, PB ，因为 $AD_1 \parallel BC_1$ ，

所以 $\angle PBC_1$ 或其补角为直线 PB 与 AD_1 所成的角，

因为 $BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，所以 $BB_1 \perp PC_1$ ，又 $PC_1 \perp B_1D_1$ ， $BB_1 \cap B_1D_1 = B_1$ ，

所以 $PC_1 \perp$ 平面 PBB_1 ，所以 $PC_1 \perp PB$ ，

设正方体棱长为 2，则 $BC_1 = 2\sqrt{2}$ ， $PC_1 = \frac{1}{2}D_1B_1 = \sqrt{2}$ ，

$$\sin \angle PBC_1 = \frac{PC_1}{BC_1} = \frac{1}{2}，\text{ 所以 } \angle PBC_1 = \frac{\pi}{6}.$$

故选：D

6. 将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训，每名志愿者只分配到 1 个项目，每个项目至少分配 1 名志愿者，则不同的分配方案共有（ ）

- A. 60 种 B. 120 种 C. 240 种 D. 480 种

【答案】C

【解析】

【分析】先确定有一个项目中分配 2 名志愿者，其余各项目中分配 1 名志愿者，然后利用组合，排列，乘法原理求得.

【详解】根据题意，有一个项目中分配 2 名志愿者，其余各项目中分配 1 名志愿者，可以先从 5 名志愿者中任选 2 人，组成一个小组，有 C_5^2 种选法；然后连同其余三人，看成四个元素，四个项目看成四个不同的位置，四个不同的元素在四个不同的位置的排列方法数有 $4!$ 种，根据乘法原理，完成这件事，共有 $C_5^2 \times 4! = 240$ 种不同的分配方案，

故选：C.

【点睛】本题考查排列组合的应用问题，属基础题，关键是首先确定人数的分配情况，然后利用先选后排

思想求解.

7. 把函数 $y = f(x)$ 图像上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把所得曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图像, 则 $f(x) = (\quad)$

A. $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{7x}{12}\right)$

B. $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$

C. $\sin\left(2x - \frac{7\pi}{12}\right)$

D. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{12}\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】解法一: 从函数 $y = f(x)$ 的图象出发, 按照已知的变换顺序, 逐次变换, 得到 $y = f\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]$,

即得 $f\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, 再利用换元思想求得 $y = f(x)$ 的解析表达式;

解法二: 从函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 出发, 逆向实施各步变换, 利用平移伸缩变换法则得到 $y = f(x)$ 的解析表达式.

【详解】解法一: 函数 $y = f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 得到 $y = f(2x)$ 的图象, 再把所得曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 应当得到 $y = f\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]$ 的图象,

根据已知得到了函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象, 所以 $f\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,

令 $t = 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, 则 $x = \frac{t}{2} + \frac{\pi}{3}$, $x - \frac{\pi}{4} = \frac{t}{2} + \frac{\pi}{12}$,

所以 $f(t) = \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$, 所以 $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$;

解法二: 由已知的函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 逆向变换,

第一步: 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ 的图象,

第二步：图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，得到 $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$ 的图象，

即为 $y = f(x)$ 的图象，所以 $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$.

故选：B.

【点睛】 本题考查三角函数的图象的平移和伸缩变换，属基础题，可以正向变换，也可以逆向变换求解，关键是要注意每一步变换，对应的解析式中都是 x 的变换，图象向左平移 a 个单位，对应 x 替换成 $x+a$ ，图象向右平移 a 个单位，对应 x 替换成 $x-a$ ，牢记“左加右减”口诀；图象上每个点的横坐标伸长或缩短到原来的 k 倍，对应解析式中 x 替换成 $\frac{x}{k}$.

8. 在区间 $(0,1)$ 与 $(1,2)$ 中各随机取 1 个数，则两数之和大于 $\frac{7}{4}$ 的概率为 ()

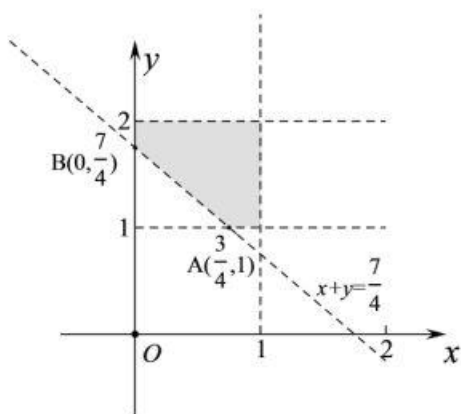
- A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{23}{32}$ C. $\frac{9}{32}$ D. $\frac{2}{9}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 设从区间 $0,1, 1,2$ 中随机取出的数分别为 x,y ，则实验的所有结果构成区域为 $\Omega = \{(x,y) | 0 < x < 1, 1 < y < 2\}$ ，设事件 A 表示两数之和大于 $\frac{7}{4}$ ，则构成的区域为 $A = \{(x,y) | 0 < x < 1, 1 < y < 2, x+y > \frac{7}{4}\}$ ，分别求出 Ω, A 对应的区域面积，根据几何概型的概率公式即可解出.

【详解】 如图所示：



设从区间 $0,1, 1,2$ 中随机取出的数分别为 x,y ，则实验的所有结果构成区域为

$\Omega = \{(x,y) | 0 < x < 1, 1 < y < 2\}$ ，其面积为 $S_{\Omega} = 1 \times 1 = 1$.

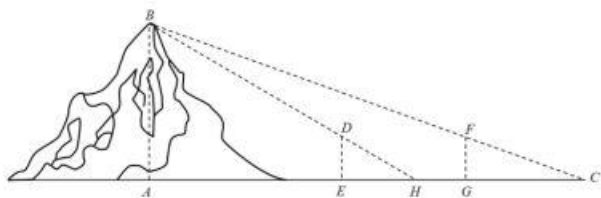
设事件 A 表示两数之和大于 $\frac{7}{4}$ ，则构成的区域为 $A = \left\{ (x, y) \mid 0 < x < 1, 1 < y < 2, x + y > \frac{7}{4} \right\}$ ，即图中的阴影

部分，其面积为 $S_A = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{23}{32}$ ，所以 $P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{23}{32}$ 。

故选：B。

【点睛】 本题主要考查利用线性规划解决几何概型中的面积问题，解题关键是准确求出事件 Ω, A 对应的区域面积，即可顺利解出。

9. 魏晋时刘徽撰写的《海岛算经》是关测量的数学著作，其中第一题是测海岛的高。如图，点 E, H, G 在水平线 AC 上， DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度，称为“表高”， EG 称为“表距”， GC 和 EH 都称为“表目距”， GC 与 EH 的差称为“表目距的差”则海岛的高 $AB =$ ()



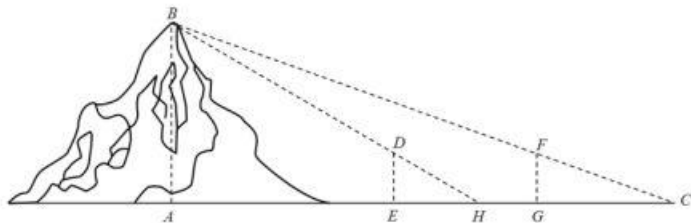
- A. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}$ B. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表高}$
- C. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表距}$ D. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表距}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 利用平面相似的有关知识以及合分比性质即可解出。

【详解】 如图所示：



由平面相似可知， $\frac{DE}{AB} = \frac{EH}{AH}$ ， $\frac{FG}{AB} = \frac{CG}{AC}$ ，而 $DE = FG$ ，所以

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EH}{AH} = \frac{CG}{AC} = \frac{CG - EH}{AC - AH} = \frac{CG - EH}{CH}$$

而 $CH = CE - EH = CG - EH + EG$ ，

$$\text{即 } AB = \frac{CG - EH + EG}{CG - EH} \times DE = \frac{EG \times DE}{CG - EH} + DE = \frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}.$$

故选: A.

【点睛】本题解题关键是通过相似建立比例式, 围绕所求目标进行转化即可解出.

10. 设 $a \neq 0$, 若 $x = a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 则 ()

- A. $a < b$ B. $a > b$ C. $ab < a^2$ D. $ab > a^2$

【答案】D

【解析】

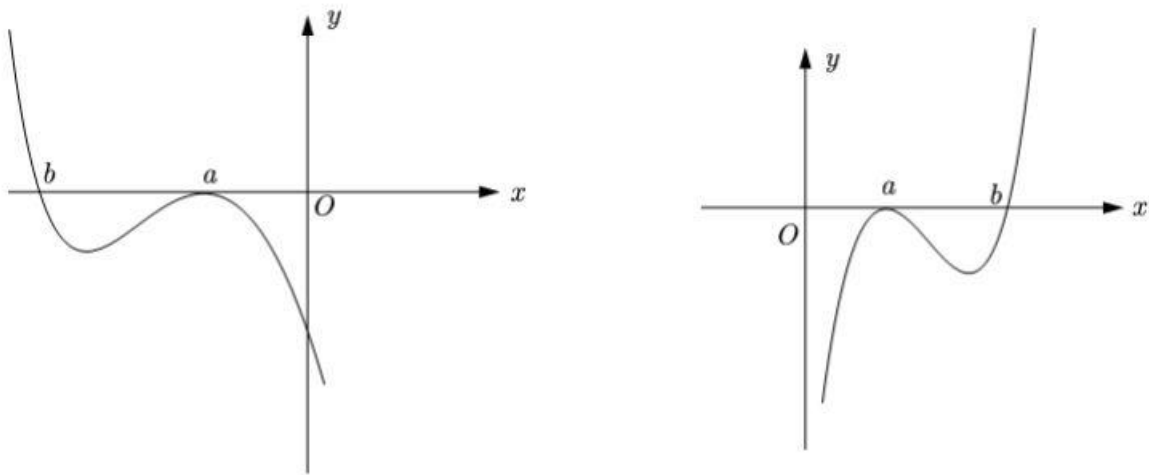
【分析】先考虑函数的零点情况, 注意零点左右附近函数值是否变号, 结合极大值点的性质, 对 a 进行分类讨论, 画出 $f(x)$ 图象, 即可得到 a, b 所满足的关系, 由此确定正确选项.

【详解】若 $a = b$, 则 $f(x) = a(x-a)^3$ 为单调函数, 无极值点, 不符合题意, 故 $a \neq b$.

$\therefore f(x)$ 有 $x = a$ 和 $x = b$ 两个不同零点, 且在 $x = a$ 左右附近是不变号, 在 $x = b$ 左右附近是变号的. 依题意,

$x = a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, \therefore 在 $x = a$ 左右附近都是小于零的.

当 $a < 0$ 时, 由 $x > b$, $f(x) \leq 0$, 画出 $f(x)$ 的图象如下图所示:



由图可知 $b < a$, $a < 0$, 故 $ab > a^2$.

当 $a > 0$ 时, 由 $x > b$ 时, $f(x) > 0$, 画出 $f(x)$ 的图象如下图所示:

由图可知 $b > a$, $a > 0$, 故 $ab > a^2$.

综上所述, $ab > a^2$ 成立.

故选: D

【点睛】本小题主要考查三次函数的图象与性质，利用数形结合的数学思想方法可以快速解答.

11. 设 B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点，若 C 上的任意一点 P 都满足 $|PB| \leq 2b$ ，则 C 的离心率的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ B. $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ D. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

【答案】C

【解析】

【分析】设 $P(x_0, y_0)$ ，由 $B(0, b)$ ，根据两点间的距离公式表示出 $|PB|$ ，分类讨论求出 $|PB|$ 的最大值，再构建齐次不等式，解出即可.

【详解】设 $P(x_0, y_0)$ ，由 $B(0, b)$ ，因为 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ ， $a^2 = b^2 + c^2$ ，所以

$$|PB|^2 = x_0^2 + (y_0 - b)^2 = a^2 \left(1 - \frac{y_0^2}{b^2}\right) + (y_0 - b)^2 = -\frac{c^2}{b^2} \left(y_0 + \frac{b^3}{c^2}\right)^2 + \frac{b^4}{c^2} + a^2 + b^2,$$

因 $-b \leq y_0 \leq b$ ，当 $-\frac{b^3}{c^2} \leq -b$ ，即 $b^2 \geq c^2$ 时， $|PB|_{\max}^2 = 4b^2$ ，即 $|PB|_{\max} = 2b$ ，符合题意，由 $b^2 \geq c^2$ 可

得 $a^2 \geq 2c^2$ ，即 $0 < e \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ；

当 $-\frac{b^3}{c^2} > -b$ ，即 $b^2 < c^2$ 时， $|PB|_{\max}^2 = \frac{b^4}{c^2} + a^2 + b^2$ ，即 $\frac{b^4}{c^2} + a^2 + b^2 \leq 4b^2$ ，化简得， $(c^2 - b^2)^2 \leq 0$ ，显

然该不等式不成立.

故选：C.

【点睛】本题解题关键是如何求出 $|PB|$ 的最大值，利用二次函数求指定区间上的最值，要根据定义域讨论函数的单调性从而确定最值.

12. 设 $a = 2\ln 1.01$ ， $b = \ln 1.02$ ， $c = \sqrt{1.04} - 1$. 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

【答案】B

【解析】

【分析】利用对数的运算和对数函数的单调性不难对 a, b 的大小作出判定，对于 a 与 c ， b 与 c 的大小关系，

将 0.01 换成 x , 分别构造函数 $f(x) = 2\ln(1+x) - \sqrt{1+4x} + 1$, $g(x) = \ln(1+2x) - \sqrt{1+4x} + 1$, 利用导数分析其在 0 的右侧包括 0.01 的较小范围内的单调性, 结合 $f(0)=0, g(0)=0$ 即可得出 a 与 c , b 与 c 的大小关系.

【详解】 $a = 2\ln 1.01 = \ln 1.01^2 = \ln(1+0.01)^2 = \ln(1+2 \times 0.01 + 0.01^2) > \ln 1.02 = b$,

所以 $b < a$;

下面比较 c 与 a, b 的大小关系.

记 $f(x) = 2\ln(1+x) - \sqrt{1+4x} + 1$, 则 $f(0) = 0$, $f'(x) = \frac{2}{1+x} - \frac{2}{\sqrt{1+4x}} = \frac{2(\sqrt{1+4x} - 1 - x)}{(1+x)\sqrt{1+4x}}$,

由于 $1+4x - (1+x)^2 = 2x - x^2 = x(2-x)$

所以当 $0 < x < 2$ 时, $1+4x - (1+x)^2 > 0$, 即 $\sqrt{1+4x} > (1+x)$, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递增,

所以 $f(0.01) > f(0) = 0$, 即 $2\ln 1.01 > \sqrt{1.04} - 1$, 即 $a > c$;

令 $g(x) = \ln(1+2x) - \sqrt{1+4x} + 1$, 则 $g(0) = 0$, $g'(x) = \frac{2}{1+2x} - \frac{2}{\sqrt{1+4x}} = \frac{2(\sqrt{1+4x} - 1 - 2x)}{(1+x)\sqrt{1+4x}}$,

由于 $1+4x - (1+2x)^2 = -4x^2$, 在 $x > 0$ 时, $1+4x - (1+2x)^2 < 0$,

所以 $g'(x) < 0$, 即函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $g(0.01) < g(0) = 0$, 即 $\ln 1.02 < \sqrt{1.04} - 1$, 即

$b < c$;

综上, $b < c < a$,

故选: B.

【点睛】 本题考查比较大小问题, 难度较大, 关键难点是将各个值中的共同的量用变量替换, 构造函数, 利用导数研究相应函数的单调性, 进而比较大小, 这样的问题, 凭借近似估计计算往往是无法解决的.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{m} - y^2 = 1 (m > 0)$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x + my = 0$, 则 C 的焦距为_____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 将渐近线方程化成斜截式, 得出 a, b 的关系, 再结合双曲线中 a^2, b^2 对应关系, 联立求解 m , 再由

关系式求得 c ，即可求解

【详解】由渐近线方程 $\sqrt{3}x + my = 0$ 化简得 $y = -\frac{\sqrt{3}}{m}x$ ，即 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{m}$ ，同时平方得 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{m^2}$ ，又双曲线中 $a^2 = m, b^2 = 1$ ，故 $\frac{3}{m^2} = \frac{1}{m}$ ，解得 $m = 3, m = 0$ （舍去）， $c^2 = a^2 + b^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow c = 2$ ，故焦距 $2c = 4$

故答案为：4

【点睛】本题为基础题，考查由渐近线求解双曲线中参数，焦距，正确计算并联立关系式求解是关键

14. 已知向量 $\vec{a} = (1, 3), \vec{b} = (3, 4)$ ，若 $(\vec{a} - \lambda\vec{b}) \perp \vec{b}$ ，则 $\lambda =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】根据平面向量数量积的坐标表示以及向量的线性运算列出方程，即可解出.

【详解】因为 $\vec{a} - \lambda\vec{b} = (1, 3) - \lambda(3, 4) = (1 - 3\lambda, 3 - 4\lambda)$ ，所以由 $(\vec{a} - \lambda\vec{b}) \perp \vec{b}$ 可得，

$$3(1 - 3\lambda) + 4(3 - 4\lambda) = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{3}{5}.$$

故答案为： $\frac{3}{5}$.

【点睛】本题解题关键是熟记平面向量数量积的坐标表示，设 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$ ，

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ ，注意与平面向量平行的坐标表示区分.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，面积为 $\sqrt{3}$ ， $B = 60^\circ$ ， $a^2 + c^2 = 3ac$ ，则 $b =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】由三角形面积公式可得 $ac = 4$ ，再结合余弦定理即可得解.

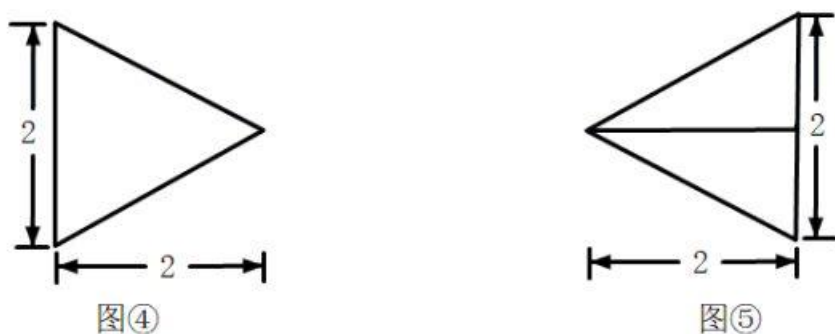
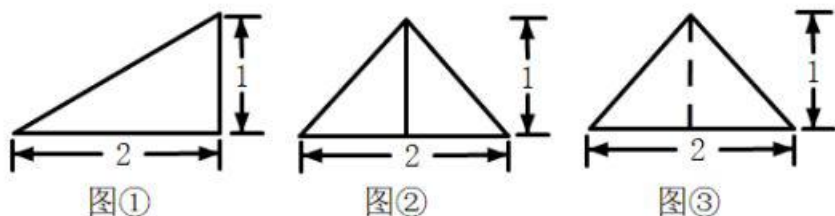
【详解】由题意， $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4}ac = \sqrt{3}$ ，

所以 $ac = 4, a^2 + c^2 = 12$ ，

所以 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 12 - 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$ ，解得 $b = 2\sqrt{2}$ （负值舍去）.

故答案为： $2\sqrt{2}$.

16. 以图①为正视图，在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图，组成某三棱锥的三视图，则所选侧视图和俯视图的编号依次为_____（写出符合要求的一组答案即可）.

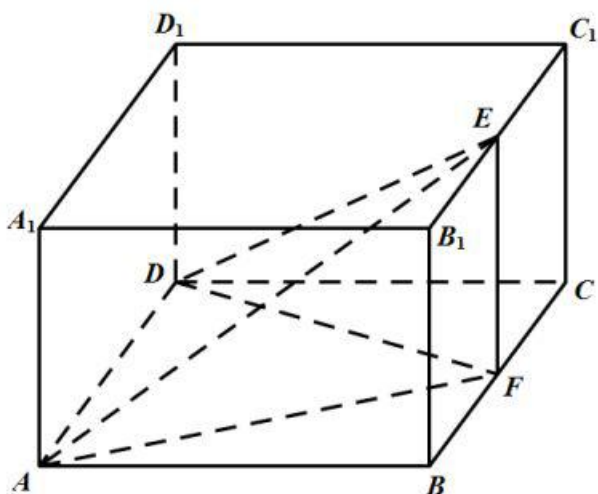


【答案】③④（答案不唯一）

【解析】

【分析】由题意结合所给的图形确定一组三视图的组合即可.

【详解】选择侧视图为③，俯视图为④，



如图所示，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=BC=2, BB_1=1$ ，

E, F 分别为棱 B_1C_1, BC 的中点，

则正视图①，侧视图③，俯视图④对应的几何体为三棱锥 $E-ADF$.

故答案为：③④.

【点睛】三视图问题解决的关键之处是由三视图确定直观图的形状以及直观图中线面的位置关系和数量关系.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，

每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. 某厂研制了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品，得到各件产品该项指标数据如下：

| | | | | | | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 旧设备 | 9.8 | 10.3 | 10.0 | 10.2 | 9.9 | 9.8 | 10.0 | 10.1 | 10.2 | 9.7 |
| 新设备 | 10.1 | 10.4 | 10.1 | 10.0 | 10.1 | 10.3 | 10.6 | 10.5 | 10.4 | 10.5 |

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为 \bar{x} 和 \bar{y} ，样本方差分别记为 S_1^2 和 S_2^2 。

(1) 求 \bar{x} ， \bar{y} ， S_1^2 ， S_2^2 ；

(2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高（如果 $\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{10}}$ ，则认为

新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高，否则不认为有显著提高）。

【答案】 (1) $\bar{x} = 10, \bar{y} = 10.3, S_1^2 = 0.036, S_2^2 = 0.04$ ；(2) 新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高。

【解析】

【分析】 (1) 根据平均数和方差的计算方法，计算出平均数和方差。

(2) 根据题目所给判断依据，结合 (1) 的结论进行判断。

【详解】 (1) $\bar{x} = \frac{9.8+10.3+10+10.2+9.9+9.8+10+10.1+10.2+9.7}{10} = 10$,

$$\bar{y} = \frac{10.1+10.4+10.1+10+10.1+10.3+10.6+10.5+10.4+10.5}{10} = 10.3,$$

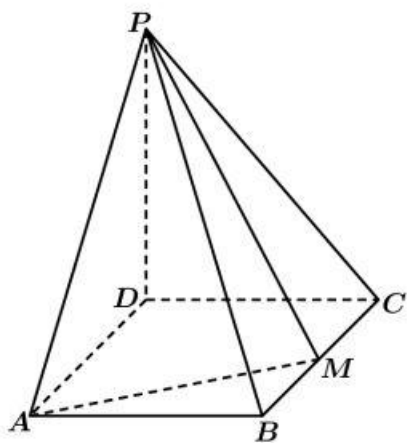
$$S_1^2 = \frac{0.2^2+0.3^2+0+0.2^2+0.1^2+0.2^2+0+0.1^2+0.2^2+0.3^2}{10} = 0.036,$$

$$S_2^2 = \frac{0.2^2+0.1^2+0.2^2+0.3^2+0.2^2+0+0.3^2+0.2^2+0.1^2+0.2^2}{10} = 0.04.$$

(2) 依题意， $\bar{y} - \bar{x} = 0.3 = 2 \times 0.15 = 2\sqrt{0.15^2} = 2\sqrt{0.0225}$ ， $2\sqrt{\frac{0.036+0.04}{10}} = 2\sqrt{0.0076}$ ，

$\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{10}}$ ，所以新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高。

18. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形， $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PD = DC = 1$ ， M 为 BC 的中点，且 $PB \perp AM$ 。



(1) 求 BC ;

(2) 求二面角 $A-PM-B$ 的正弦值.

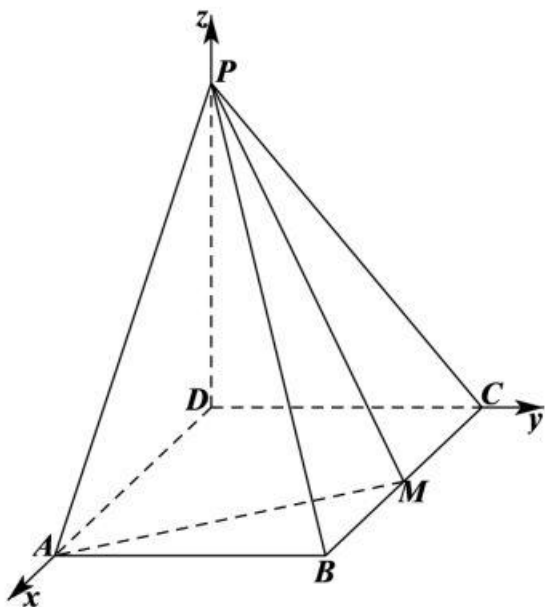
【答案】 (1) $\sqrt{2}$; (2) $\frac{\sqrt{70}}{14}$

【解析】

【分析】 (1) 以点 D 为坐标原点, DA 、 DC 、 DP 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建立空间直角坐标系, 设 $BC = 2a$, 由已知条件得出 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$, 求出 a 的值, 即可得出 BC 的长;

(2) 求出平面 PAM 、 PBM 的法向量, 利用空间向量法结合同角三角函数的基本关系可求得结果.

【详解】 (1) $\because PD \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为矩形, 不妨以点 D 为坐标原点, DA 、 DC 、 DP 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$,



设 $BC = 2a$, 则 $D(0,0,0)$ 、 $P(0,0,1)$ 、 $B(2a,1,0)$ 、 $M(a,1,0)$ 、 $A(2a,0,0)$,

则 $\overrightarrow{PB} = (2a,1,-1)$, $\overrightarrow{AM} = (-a,1,0)$,

$\because PB \perp AM$, 则 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AM} = -2a^2 + 1 = 0$, 解得 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $BC = 2a = \sqrt{2}$;

(2) 设平面 PAM 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 则 $\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 0\right)$, $\overrightarrow{AP} = (-\sqrt{2}, 0, 1)$,

$$\text{由} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AM} = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + y_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AP} = -\sqrt{2}x_1 + z_1 = 0 \end{cases}, \text{取 } x_1 = \sqrt{2}, \text{ 可得 } \vec{m} = (\sqrt{2}, 1, 2),$$

设平面 PBM 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{BM} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$, $\overrightarrow{BP} = (-\sqrt{2}, -1, 1)$,

$$\text{由} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BP} = -\sqrt{2}x_2 - y_2 + z_2 = 0 \end{cases}, \text{取 } y_2 = 1, \text{ 可得 } \vec{n} = (0, 1, 1),$$

$$\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{7} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{14}}{14},$$

$$\text{所以, } \sin \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \sqrt{1 - \cos^2 \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle} = \frac{\sqrt{70}}{14},$$

因此, 二面角 $A-PM-B$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{70}}{14}$.

【点睛】 思路点睛: 利用空间向量法求解二面角的步骤如下:

- (1) 建立合适的空间直角坐标系, 写出二面角对应的两个半平面中对应的点的坐标;
- (2) 设出法向量, 根据法向量垂直于平面内两条直线的方向向量, 求解出平面的法向量 (注: 若半平面为坐标平面, 直接取法向量即可);
- (3) 计算 (2) 中两个法向量的余弦值, 结合立体图形中二面角的情况, 判断二面角是锐角还是钝角, 从而得到二面角的余弦值.

19. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积, 已知 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$.

- (1) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;
- (2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】(1) 证明见解析; (2) $a_n = \begin{cases} \frac{3}{2}, n=1 \\ -\frac{1}{n(n+1)}, n \geq 2 \end{cases}$.

【解析】

【分析】(1) 由已知 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$ 得 $S_n = \frac{2b_n}{2b_n - 1}$, 且 $b_n \neq 0$, 取 $n=1$, 得 $b_1 = \frac{3}{2}$, 由题意得

$$\frac{2b_1}{2b_1 - 1} \cdot \frac{2b_2}{2b_2 - 1} \cdots \frac{2b_n}{2b_n - 1} = b_n, \text{消积得到项的递推关系 } \frac{2b_{n+1}}{2b_{n+1} - 1} = \frac{b_{n+1}}{b_n}, \text{进而证明数列 } \{b_n\} \text{ 是等差数列;}$$

(2) 由(1)可得 b_n 的表达式, 由此得到 S_n 的表达式, 然后利用和与项的关系求得 $a_n = \begin{cases} \frac{3}{2}, n=1 \\ -\frac{1}{n(n+1)}, n \geq 2 \end{cases}$.

【详解】(1) 由已知 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$ 得 $S_n = \frac{2b_n}{2b_n - 1}$, 且 $b_n \neq 0$, $b_n \neq \frac{1}{2}$,

取 $n=1$, 由 $S_1 = b_1$ 得 $b_1 = \frac{3}{2}$,

由于 b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积,

$$\text{所以 } \frac{2b_1}{2b_1 - 1} \cdot \frac{2b_2}{2b_2 - 1} \cdots \frac{2b_n}{2b_n - 1} = b_n,$$

$$\text{所以 } \frac{2b_1}{2b_1 - 1} \cdot \frac{2b_2}{2b_2 - 1} \cdots \frac{2b_{n+1}}{2b_{n+1} - 1} = b_{n+1}, \text{ 所以 } \frac{2b_{n+1}}{2b_{n+1} - 1} = \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

由于 $b_{n+1} \neq 0$, 所以 $\frac{2}{2b_{n+1} - 1} = \frac{1}{b_n}$, 即 $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$,

所以数列 $\{b_n\}$ 以 $b_1 = \frac{3}{2}$ 为首项, 以 $d = \frac{1}{2}$ 为公差等差数列;

(2) 由(1)可得, 数列 $\{b_n\}$ 是以 $b_1 = \frac{3}{2}$ 为首项, 以 $d = \frac{1}{2}$ 为公差的等差数列,

$$\therefore b_n = \frac{3}{2} + (n-1) \times \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}, S_n = \frac{2b_n}{2b_n - 1} = \frac{2+n}{1+n},$$

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{3}{2}$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2+n}{1+n} - \frac{1+n}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$, 显然对于 $n=1$ 不成立,

$$\therefore a_n = \begin{cases} \frac{3}{2}, n=1 \\ -\frac{1}{n(n+1)}, n \geq 2 \end{cases}$$

【点睛】 本题考查等差数列的证明，考查数列的前 n 项和与项的关系，数列的前 n 项积与项的关系，其中

由 $\frac{2b_1}{2b_1-1} \cdot \frac{2b_2}{2b_2-1} \cdots \frac{2b_n}{2b_n-1} = b_n$ ，得到 $\frac{2b_1}{2b_1-1} \cdot \frac{2b_2}{2b_2-1} \cdots \frac{2b_{n+1}}{2b_{n+1}-1} = b_{n+1}$ ，进而得到 $\frac{2b_{n+1}}{2b_{n+1}-1} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ 是关键

一步；要熟练掌握前 n 项和，积与数列的项的关系，消和（积）得到项（或项的递推关系），或者消项得到和（积）的递推关系是常用的重要的思想方法。

20. 设函数 $f(x) = \ln(a-x)$ ，已知 $x=0$ 是函数 $y = xf(x)$ 的极值点。

(1) 求 a ；

(2) 设函数 $g(x) = \frac{x+f(x)}{xf(x)}$ ，证明： $g(x) < 1$ 。

【答案】 1: 证明见详解

【解析】

【分析】 (1) 由题意求出 y' ，由极值点处导数为 0 即可求解出参数 a ；

(2) 由 (1) 得 $g(x) = \frac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}$ ， $x < 1$ 且 $x \neq 0$ ，分类讨论 $x \in (0,1)$ 和 $x \in (-\infty,0)$ ，可等价转化为要

证 $g(x) < 1$ ，即证 $x + \ln(1-x) > x\ln(1-x)$ 在 $x \in (0,1)$ 和 $x \in (-\infty,0)$ 上恒成立，结合导数和换元法即可求解

【详解】 (1) 由 $f(x) = \ln(a-x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x-a}$ ， $y = xf(x) \Rightarrow y' = \ln(a-x) + \frac{x}{x-a}$ ，

又 $x=0$ 是函数 $y = xf(x)$ 的极值点，所以 $y'(0) = \ln a = 0$ ，解得 $a=1$ ；

(2) 由 (1) 得 $f(x) = \ln(1-x)$ ， $g(x) = \frac{x+f(x)}{xf(x)} = \frac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}$ ， $x < 1$ 且 $x \neq 0$ ，

当 $x \in (0,1)$ 时，要证 $g(x) = \frac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)} < 1$ ， $\because x > 0, \ln(1-x) < 0$ ， $\therefore x\ln(1-x) < 0$ ，即证

$x + \ln(1-x) > x\ln(1-x)$ ，化简得 $x + (1-x)\ln(1-x) > 0$ ；

同理，当 $x \in (-\infty,0)$ 时，要证 $g(x) = \frac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)} < 1$ ， $\because x < 0, \ln(1-x) > 0$ ， $\therefore x\ln(1-x) < 0$ ，即证

$x + \ln(1-x) > x \ln(1-x)$, 化简得 $x + (1-x)\ln(1-x) > 0$;

令 $h(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$, 再令 $t = 1-x$, 则 $t \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, $x = 1-t$,

令 $g(t) = 1-t+t\ln t$, $g'(t) = -1 + \ln t + 1 = \ln t$,

当 $t \in (0,1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单减, 假设 $g(1)$ 能取到, 则 $g(1) = 0$, 故 $g(t) > g(1) = 0$;

当 $t \in (1,+\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单增, 假设 $g(1)$ 能取到, 则 $g(1) = 0$, 故 $g(t) > g(1) = 0$;

综上所述, $g(x) = \frac{x + \ln(1-x)}{x \ln(1-x)} < 1$ 在 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ 恒成立

【点睛】 本题为难题, 根据极值点处导数为 0 可求参数 a , 第二问解法并不唯一, 分类讨论对函数进行等价转化的过程, 一定要注意转化前后的等价性问题, 构造函数和换元法也常常用于解决复杂函数的最值与恒成立问题.

21. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 且 F 与圆 $M: x^2 + (y+4)^2 = 1$ 上点的距离的最小值为 4.

(1) 求 p ;

(2) 若点 P 在 M 上, PA, PB 是 C 的两条切线, A, B 是切点, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

【答案】 (1) $p = 2$; (2) $20\sqrt{5}$.

【解析】

【分析】 (1) 根据圆 几何性质可得出关于 p 的等式, 即可解出 p 的值;

(2) 设点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $P(x_0, y_0)$, 利用导数求出直线 PA 、 PB , 进一步可求得直线 AB 的方程, 将直线 AB 的方程与抛物线的方程联立, 求出 $|AB|$ 以及点 P 到直线 AB 的距离, 利用三角形的面积公式结合二次函数的基本性质可求得 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

【详解】 (1) 抛物线 C 的焦点为 $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$, $|FM| = \frac{p}{2} + 4$,

所以, F 与圆 $M: x^2 + (y+4)^2 = 1$ 上点的距离的最小值为 $\frac{p}{2} + 4 - 1 = 4$, 解得 $p = 2$;

(2) 抛物线 C 的方程为 $x^2 = 4y$, 即 $y = \frac{x^2}{4}$, 对该函数求导得 $y' = \frac{x}{2}$,

设点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $P(x_0, y_0)$,

直线 PA 的方程为 $y - y_1 = \frac{x_1}{2}(x - x_1)$, 即 $y = \frac{x_1 x}{2} - y_1$, 即 $x_1 x - 2y_1 - 2y = 0$,

同理可知, 直线 PB 的方程为 $x_2 x - 2y_2 - 2y = 0$,

由于点 P 为这两条直线的公共点, 则 $\begin{cases} x_1 x_0 - 2y_1 - 2y_0 = 0 \\ x_2 x_0 - 2y_2 - 2y_0 = 0 \end{cases}$,

所以, 点 A 、 B 的坐标满足方程 $x_0 x - 2y - 2y_0 = 0$,

所以, 直线 AB 的方程为 $x_0 x - 2y - 2y_0 = 0$,

联立 $\begin{cases} x_0 x - 2y - 2y_0 = 0 \\ y = \frac{x^2}{4} \end{cases}$, 可得 $x^2 - 2x_0 x + 4y_0 = 0$,

由韦达定理可得 $x_1 + x_2 = 2x_0$, $x_1 x_2 = 4y_0$,

所以, $|AB| = \sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{4x_0^2 - 16y_0} = \sqrt{(x_0^2 + 4)(x_0^2 - 4y_0)}$,

点 P 到直线 AB 的距离为 $d = \frac{|x_0^2 - 4y_0|}{\sqrt{x_0^2 + 4}}$,

所以, $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot d = \frac{1}{2}\sqrt{(x_0^2 + 4)(x_0^2 - 4y_0)} \cdot \frac{|x_0^2 - 4y_0|}{\sqrt{x_0^2 + 4}} = \frac{1}{2}(x_0^2 - 4y_0)^{\frac{3}{2}}$,

$\because x_0^2 - 4y_0 = 1 - (y_0 + 4)^2 - 4y_0 = -y_0^2 - 12y_0 - 15 = -(y_0 + 6)^2 + 21$,

由已知可得 $-5 \leq y_0 \leq -3$, 所以, 当 $y_0 = -5$ 时, $\triangle PAB$ 的面积取最大值 $\frac{1}{2} \times 20^{\frac{3}{2}} = 20\sqrt{5}$.

【点睛】方法点睛: 圆锥曲线中的最值问题解决方法一般分两种:

一是几何法, 特别是用圆锥曲线的定义和平面几何的有关结论来求最值;

二是代数法, 常将圆锥曲线的最值问题转化为二次函数或三角函数的最值问题, 然后利用基本不等式、函数的单调性或三角函数的有界性等求最值.

(二) 选考题, 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

[选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

22. 在直角坐标系 xOy 中, $\odot C$ 的圆心为 $C(2,1)$, 半径为 1.

(1) 写出 $\odot C$ 的一个参数方程;

(2) 过点 $F(4,1)$ 作 $\odot C$ 的两条切线. 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求这两条切线的极坐标方程.

【答案】 (1) $\begin{cases} x = 2 + \cos \alpha \\ y = 1 + \sin \alpha \end{cases}$, (α 为参数); (2) $2\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 4 - \sqrt{3}$ 或 $2\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = 4 + \sqrt{3}$.

【解析】

【分析】 (1) 直接利用圆心及半径可得的圆的参数方程;

(2) 先求得过 $(4, 1)$ 的圆的切线方程, 再利用极坐标与直角坐标互化公式化简即可.

【详解】 (1) 由题意, $\odot C$ 的普通方程为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$,

所以 $\odot C$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \cos \alpha \\ y = 1 + \sin \alpha \end{cases}$, (α 为参数)

(2) 由题意, 切线的斜率一定存在, 设切线方程为 $y-1 = k(x-4)$, 即 $kx - y + 1 - 4k = 0$,

由圆心到直线的距离等于 1 可得 $\frac{|-2k|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$,

解得 $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以切线方程为 $\sqrt{3}x - 3y + 3 - 4\sqrt{3} = 0$ 或 $\sqrt{3}x + 3y - 3 - 4\sqrt{3} = 0$,

将 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ 代入化简得

$2\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 4 - \sqrt{3}$ 或 $2\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = 4 + \sqrt{3}$

【点睛】 本题主要考查直角坐标方程与极坐标方程的互化, 涉及到直线与圆的位置关系, 考查学生的数学运算能力, 是一道基础题.

【选修 4-5: 不等式选讲】 (10 分)

23. 已知函数 $f(x) = |x-a| + |x+3|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 6$ 的解集;

(2) 若 $f(x) > -a$, 求 a 的取值范围.

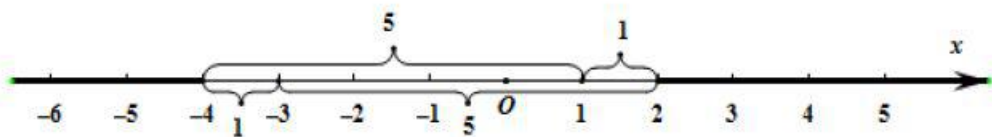
【答案】 (1) $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$. (2) $(-\frac{3}{2}, +\infty)$.

【解析】

【分析】 (1) 利用绝对值的几何意义求得不等式的解集.

(2) 利用绝对值不等式化简 $f(x) > -a$, 由此求得 a 的取值范围.

【详解】(1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=|x-1|+|x+3|$, $|x-1|+|x+3|$ 表示数轴上的点到 1 和 -3 的距离之和, 则 $f(x) \geq 6$ 表示数轴上的点到 1 和 -3 的距离之和不小于 6, 当 $x=-4$ 或 $x=2$ 时所对应 数轴上的点到 1, -3 所对应的点距离之和等于 6, \therefore 数轴上到 1, -3 所对应的点距离之和等于大于等于 6 得到所对应的坐标的范围是 $x \leq -4$ 或 $x \geq 2$, 所以 $f(x) \geq 6$ 的解集为 $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$.



(2) 依题意 $f(x) > -a$, 即 $|x-a|+|x+3| > -a$ 恒成立, $|x-a|+|x+3|=|a-x|+|x+3| \geq |a+3|$, 当且仅当 $(a-x)(x+3) \geq 0$ 时取等号, $\therefore f(x)_{\min} = |a+3|$, 故 $|a+3| > -a$, 所以 $a+3 > -a$ 或 $a+3 < a$, 解得 $a > -\frac{3}{2}$. 所以 a 的取值范围是 $(-\frac{3}{2}, +\infty)$.

【点睛】解绝对值不等式的方法有零点分段法、几何意义法. 解含有两个绝对值, 且其中的 x 的系数相等时, 可以考虑利用数轴上绝对值的几何意义求解; 利用绝对值三角不等式求最值也是常见的问题, 注意表述取等号的条件.