2021 年普通高等学校招生全国统一考试
理科数学甲卷 参考答案

本试卷 5 页, 23 题 (含选考题). 全卷满分 150 分. 考试用时 120 分钟.

注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.

2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

3. 非选择题的作答: 用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

4. 选考题的作答: 先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑. 答案写在答题卡上对应的答题区域内. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

5. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并上交.

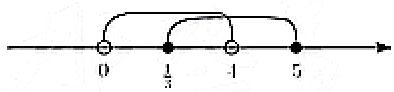
一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求.

1. 设集合 $M=\{x|0<x<4\}$, $N=\{x|\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 5\}$, 则 $M\cap N=(\quad)$.

A: $\{x|0<x\leqslant\frac{1}{3}\}$　　B: $\{x|\frac{1}{3}\leqslant x<4\}$　　C: $\{x|4\leqslant x<5\}$　　D: $\{x|0<x\leqslant 5\}$

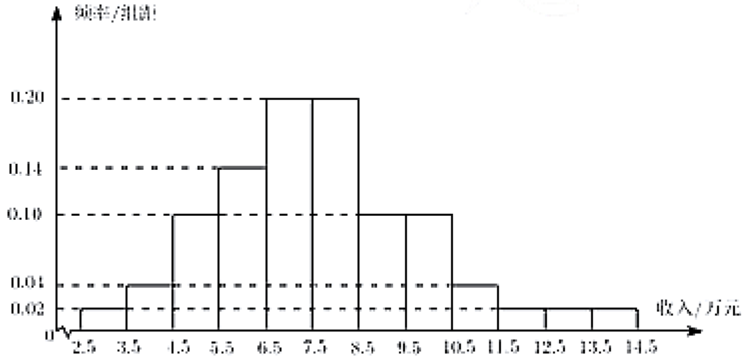
答案: B.

解析:



由图知, $M\cap N=\{x|\frac{1}{3}\leqslant x<4\}$.

2. 为了解某地农村经济情况, 对该地农户家庭年收入进行抽样调查, 将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图:



根据此频率分布直方图, 下面结论中不正确的是 ( ).

A：该地农户家庭年收入低于 4.5 万元的农户比率估计为 6%

B：该地农户家庭年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计为 10%

C：估计该地农户家庭年收入的平均值不超过 6.5 万元

D：估计该地有一半以上的农户，其家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间.

答案： C.

解析： A. 低于 4.5 万元的比率估计为 $0.02\times1+0.04\times1=0.06=6\%$ 正确.

B. 不低于 10.5 万元的比率估计为 $(0.04+0.02\times3)\times1=0.1=10\%$ 正确.

C. 平均值为: $(3\times0.02+4\times0.04+5\times0.1+6\times0.14+7\times0.2+8\times0.2+9\times0.1+10\times0.1+11\times0.04+12\times0.02+13\times0.02+14\times0.02)\times1=7.68$ 万元, 不正确.

D. 4.5 万到 8.5 万的比率为: $0.1\times1+0.14\times1+0.2\times1+0.2\times1=0.64$. 正确.

3. 已知 $(1-\mathrm{i})^2z=3+2\mathrm{i}$, 则 $z=$ (　).

A：$-1-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$　　B：$-1+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$　　C：$-\dfrac{3}{2}+\mathrm{i}$　　D：$-\dfrac{3}{2}-\mathrm{i}$

答案： B.

解析： $z=\dfrac{3+2\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}=\dfrac{3+2\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}=\dfrac{-2+3\mathrm{i}}{2}=-1+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$, 选 B.

4. 青少年视力是社会普遍关注的问题, 视力情况可借助视力表测量. 通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据, 五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V 满足 $L=5+\lg V$. 已知某同学视力的五分记录法的数据为 4.9, 则其视力的小数记录法的数据约为 ($\sqrt[10]{10}\approx1.259$) (　).

A：1.5　　B：1.2　　C：0.8　　D：0.6

答案： C.

解析： 代入 $L=5+\lg V$, 知 $\lg V=4.9-5=-0.1$, 故 $V=10^{-0.1}=\dfrac{1}{\sqrt[10]{10}}\approx0.8$, 选 C.

5. 已知 F_1,F_2 是双曲线 C 的两个焦点, P 为 C 上一点, 且 $\angle F_1PF_2=60^\circ,|PF_1|=3|PF_2|$, 则 C 的离心率为 (　).

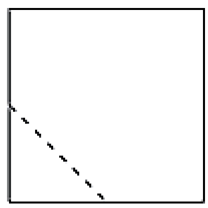
A：$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　　B：$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　　C：$\sqrt{7}$　　D：$\sqrt{13}$

答案： A.

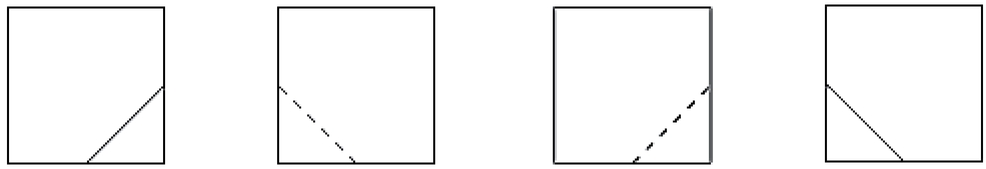
解析： 记 $r_1=|PF_1|,r_2=|PF_2|$. 由 $r_1=3r_2$ 及 $r_1-r_2=2a$ 得 $r_1=3a,r_2=a$.

又由余弦定理知 $r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cdot\cos\angle F_1PF_2=4c^2$ 得 $7a^2=4c^2$, 从而 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$, 选 A.

6. 在一个正方体中, 过顶点 A 的三条棱的中点分别为 E,F,G. 该正方体截去三棱锥 $A-EFG$ 后, 所得多面体的三视图中, 正视图如图所示, 则相应的侧视图是 (　).



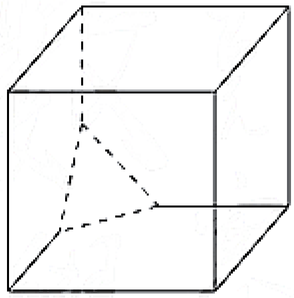
题图（正视图）



A　　B　　C　　D

答案：D.

解析：由题可得直观图，如下图.



故选 D.

7. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和为 S_n，设甲：$q > 0$，乙：$\{S_n\}$ 是递增数列，则（ ）.

A：甲是乙的充分条件但不是必要条件

B：甲是乙的必要条件但不是充分条件

C：甲是乙的充要条件

D：甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

答案：B.

解析：若 $q = 1$，则 $S_n = na_1$.

① $a_1 > 0$，则 $\{S_n\}$ 单调递增；

② $a_1 < 0$，则 $\{S_n\}$ 单调递减.

$\therefore$ 甲 $\nRightarrow$ 乙

又若 $\{S_n\}$ 单调递增，则 $S_{n+1} > S_n$ 恒成立.

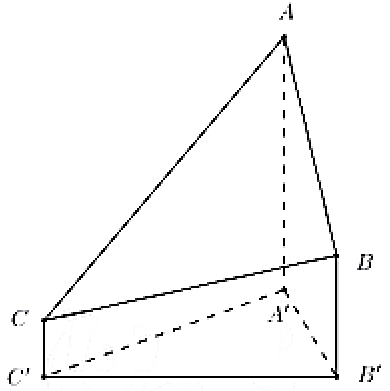
$\therefore a_{n+1} > 0 \Rightarrow a_1q^n > 0$ 恒成立.

$\therefore a_1 > 0, q > 0$.

$\therefore$ 甲 $\Leftarrow$ 乙.

综上：甲 $\Leftarrow$ 乙，选 B.

8. 2020 年 12 月 8 日，中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为 8848.86（单位：m），三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一．如图是三角高程测量法的一个示意图，现有 A, B, C 三点，且 A, B, C 在同一水平面上的投影 A', B', C' 满足 $\angle A'C'B' = 45°$，$\angle A'B'C' = 60°$．由 C 点测得 B 点的仰角为 $15°$，BB' 与 CC' 的差为 100；由 B 点测得 A 点的仰角为 $45°$，则 A, C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA' - CC'$ 约为（$\sqrt{3} \approx 1.732$）（ ）.



A：346　　B：373　　C：446　　D：473

答案：B.

解析：由题意得 $BM = 100, \angle BCM = 15°, \angle ABN = 45°$. 即 $CM = 100\cos 15° = B'C'$.

所以

$$BN = B'A' = \frac{B'C'\sin 45°}{\sin 75°} = \frac{100\cos 15° \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin 75°} = \frac{50\sqrt{2}\cdot\cos 75°}{\sin 15°\sin 75°} = \frac{50\sqrt{2}}{\sin 15°}$$

所以

$$AN = BN = \frac{50\sqrt{2}}{\sin 75°} = \frac{50\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = 273.$$

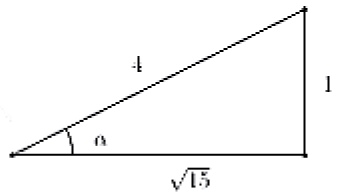
又 $AQ = AA' - CC' = AQ = AN + NQ = (BB' - CC') + NQ = 100 + 273 = 373$.

9. 若 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan 2\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$, 则 $\tan\alpha =$(　).

A：$\dfrac{\sqrt{15}}{15}$　　B：$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C：$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　D：$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

答案：A.

解析：$\tan 2\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$.



$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$

$\therefore 2\sin\alpha(2-\sin\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\therefore 4\sin\alpha - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\therefore \sin\alpha = \dfrac{1}{4}$.

又 $\because \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 如图, $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{15}} = \dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

10. 将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行, 则 2 个 0 不相邻的概率为(　).

A：$\dfrac{1}{3}$　　B：$\dfrac{2}{5}$　　C：$\dfrac{2}{3}$　　D：$\dfrac{4}{5}$

答案：C.

解析：把位置依次标为 1 到 6.

总数: 先排 2 个 0, 有 $C_6^2 = 15$ 种, 再排 4 个 1, 有一种, 故共有 15 种.

满足题设的排法: 先排 4 个 1, 有 1 种, 其间有 5 个空, 选 2 个空插入有 $C_5^2 = 10$ 种.

故 $P = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$.

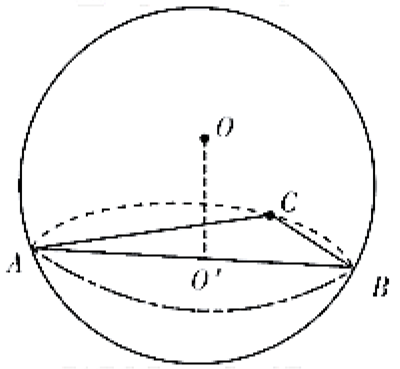
满足题设排法的另一种解释：0 的位置有 (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,5), (3, 6), (4,6), 共 10 种.

11. 已知 A,B,C 是半径为 1 的球 O 的球面上的三个点, 且 $AC \perp BC$, $AC = BC = 1$, 则三棱锥 $O-ABC$ 的体积为 ( ).

A: $\frac{\sqrt{2}}{12}$　　B: $\frac{\sqrt{3}}{12}$　　C: $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

答案: A.

解析: 记 O' 为 A,B,C 所在圆面的圆心, 则 $OO' \perp ABC$.



又 $AB = \sqrt{2}$, 所以

$$OO' = \sqrt{OA^2 - AO'^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以

$$V_{O-ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot OO' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

故选 A.

12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [1,2]$ 时, $f(x) = ax^2 + b$. 若 $f(0) + f(3) = 6$, 则 $f(\frac{9}{2}) =$ ( ).

A: $-\frac{9}{4}$　　B: $-\frac{3}{2}$　　C: $\frac{7}{4}$　　D: $\frac{5}{2}$

答案: D.

解析: $\because f(x+1)$ 为奇函数, $\therefore f(x)$ 关于 $(1,0)$ 中心对称, $\therefore f(1) = 0$.

因 $f(x+2)$ 为偶函数, 故 $f(x)$ 关于 $x = 2$ 轴对称, 周期为 4.

$\therefore f(0) = -f(2), f(3) = f(1)$, 即 $f(1) - f(2) = 6$, $f(2) = -6$.

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 4a + b = -6 \end{cases}, \therefore \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}.$$

故

$$f\left(\frac{9}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(-2 \times \frac{9}{4} + 2\right) = \frac{5}{2}.$$

故选 D.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 曲线 $y=\frac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1,-3)$ 处的切线方程为________.

答案：$y=5x+2$.

解析：$f'(x)=\frac{5}{(x+2)^2}$，$f'(-1)=5$，$f(-1)=\frac{-3}{1}=3$.

切线：$y+3=5(x+1)\Rightarrow y=5x+2$.

14. 已知向量 $a=(3,1)$，$b=(1,0)$，$c=a+kb$. 若 $a\perp c$，则 $k=$________.

答案：$-\frac{10}{3}$.

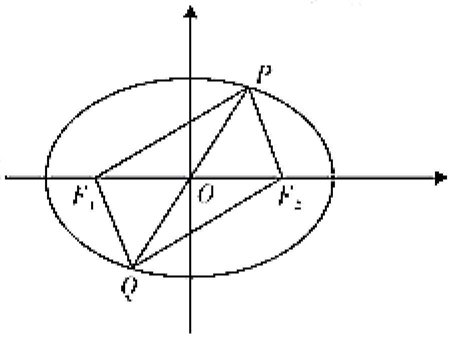
解析：$c=(3+k,1)$，$a\cdot c=0\Leftrightarrow 3(3+k)+1=0$.

所以 $k=-\frac{10}{3}$.

15. 已知 F_1,F_2 为椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，P,Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点，且 $|PQ|=|F_1F_2|$，则四边形 PF_1QF_2 的面积为________.

答案：8.

解析：如图，由 $|PQ|=|F_1F_2|$ 及椭圆对称性可知，四边形 PF_1QF_2 为矩形.

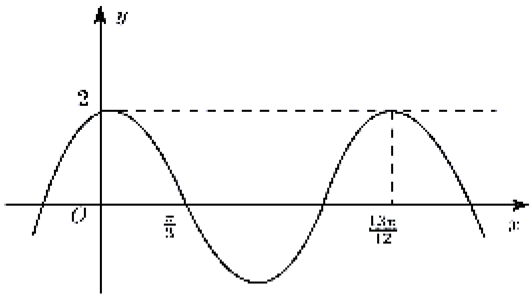


设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则

$$\begin{cases} m+n=8 & ① \\ m^2+n^2=|F_1F_2|^2=48 & ② \end{cases}$$

$\frac{①^2-②}{2}$ 得 $mn=8$. 所以，四边形 PF_1QF_2 面积为 $mn=8$.

16. 已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图所示，则满足条件 $(f(x)-f(-\frac{7\pi}{4}))(f(x)-f(\frac{4\pi}{3}))>0$ 的最小正整数 x 为________.



答案：2.

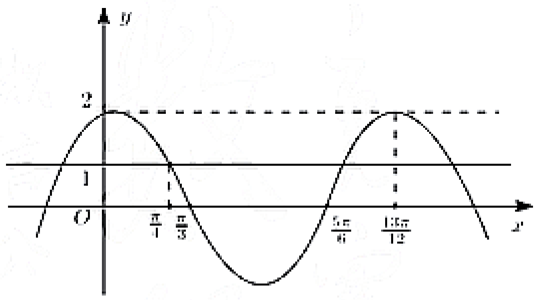
解析：由图可知，$f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{4}{3}\times\left(\frac{13}{12}\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$，$\therefore \omega=2$.

$\because f\left(\frac{13\pi}{12}\right)=2$，$\therefore 2\cos\left(\frac{13\pi}{6}+\varphi\right)=2$，$\therefore \varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in z$.

$\therefore f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$\therefore f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$，$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=1$.

$\therefore (f(x)-1)(f(x)-0)>0 \Leftrightarrow f(x)<0$ 或 $f(x)<1$.

联系图象可知，满足 $f(x)>1$ 的离 y 轴最近的正数区间 $\subseteq\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，无整数；$f(x)<0$ 的离 y 轴最近的正数区间为 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，最小正整数 $x=2$.



解析图

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题. 每个试题考生都必须作答；第 22、23 题为选考题. 考生根据要求作答.

(一) 必考题：共 60 分.

17. (12 分)

甲、乙两台机床生产同种产品，产品按质量分为一级品和二级品. 为了比较两台机床产品的质量，分别用两台机床各生产了 200 件产品，产品的质量情况统计如下表：

	一级品	二级品	合计
甲机床	150	50	200
乙机床	120	80	200
合计	270	130	400

(1) 甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别是多少？

(2) 能否有 99% 的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异？

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

解析：(1) 由表格数据得：

甲机床生产的产品中一级品的频率为 $\frac{150}{200}=\frac{3}{4}$；

乙机床生产的产品中一级品的频率为 $\frac{120}{200}=\frac{3}{5}$；

(2) 由题意

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{400\times(150\times 80-120\times 50)^2}{200\times 200\times 270\times 130}\approx 10.256>6.635.$$

所以有 99% 的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异.

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数. 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 从下面 ①②③ 中选取两个作为条件. 证明另外一个成立.

① 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列; ② 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列; ③ $a_2 = 3a_1$.

注: 若选择不同的组合分别解答. 则按第一个解答计分.

①. ③⇒②

证明: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

因为 $a_2 = 3a_1$. 所以 $a_1 + d = 3a_1$. 则 $d = 2a_1$. 所以

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = na_1 + n(n-1)a_1 = n^2a_1.$$

所以

$$\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = n\sqrt{a_1} - (n-1)\sqrt{a_1} = \sqrt{a_1}.$$

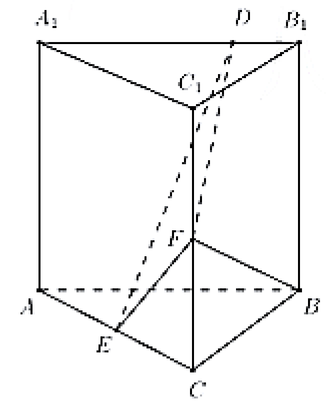
所以 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是首项为 $\sqrt{a_1}$, 公差为 $\sqrt{a_1}$ 的等差数列.

19. (12 分)

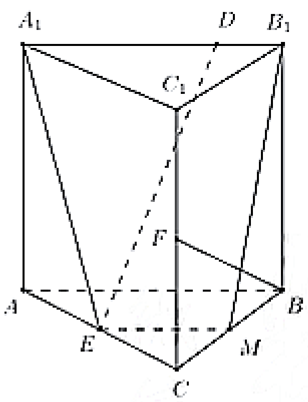
已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中. 侧面 AA_1B_1B 为正方形. $AB = BC = 2$. E, F 分别为 AC 和 CC_1 的中点. D 为棱 A_1B_1 上的点. $BF \perp A_1B_1$.

(1) 证明: $BF \perp DE$;

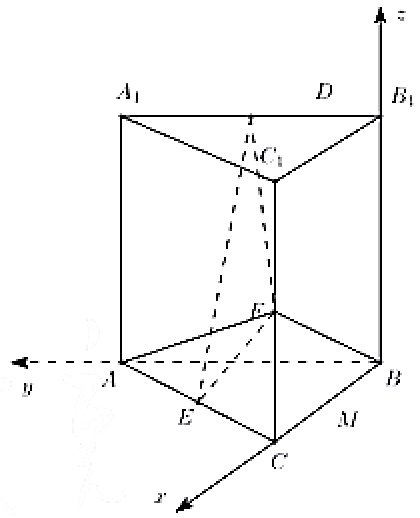
(2) 当 B_1D 为何值时. 面 BB_1C_1C 与面 DFE 所成的二面角的正弦值最小?



证明: (1) 连 A_1E. 取 BC 中点 M 连 B_1M, EM.



解析 (1) 图



解析 (2) 图

由 EM 为 AC, BC 中点, 则 $EM \parallel AB$.

又 $AB \parallel A_1B_1$, $A_1B_1 \parallel EM$, 则 A_1B_1ME 共面, 故 $DE \subset$ 面 A_1B_1ME.

又在侧面 BCC_1B_1 中 $\triangle FCB \cong \triangle MBB_1$, 则 $BF \perp MB_1$.

又

$$\left.\begin{aligned} BF \perp A_1B_1 \\ MB_1 \cap A_1B_1 = B_1 \\ MB_1, A_1B_1 \subset \text{面}A_1B_1ME \end{aligned}\right\} \Rightarrow BF \perp \text{面}A_1B_1ME, \text{则} BF \perp DE.$$

(2) $BF \perp A_1B_1$ 则 $BF \perp AB \Rightarrow AF^2 = P \Rightarrow AF = 3$.

又 $AF^2 = FC^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = 8$ 则 $AB \perp BC$.

如图以 B 为原点建立坐标轴, 则 $B(0,0,0), C(2,0,0), A(0,2,0), E(1,1,0), F(2,0,1)$.

设 $DB_1 = t$ 则 $D(0,t,2)$ $0 \leqslant t \leqslant 2$.

则面 BCC_1B_1 法向量为 $\boldsymbol{m}(0,1,0)$, 对面 DEF 设法向量为 $\boldsymbol{n}(x,y,z)$, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{EF} = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{ED} = (-1,t-1,2) \end{cases} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \\ \overrightarrow{ED} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \boldsymbol{n} = (1+t, 3, 2-t)$$

则

$$\cos\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle = \frac{3}{\sqrt{(1+t)^2 + 3^2 + (2-t)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2t^2 - 2t + 14}},$$

要求最小正弦值则求最大余弦值.

当 $\frac{1}{2}$ 时二面角余弦值最大, 则 $B_1D = \frac{1}{2}$ 时二面角正弦值最小.

20. (12 分)

抛物线 C 的顶点为坐标原点 O, 焦点在 x 轴上, 直线 $l: x = 1$ 交 C 于 P, Q 两点, 且 $OP \perp OQ$. 已知点 $M(2,0)$, 且 $\odot M$ 与 l 相切.

(1) 求 C, $\odot M$ 的方程;

(2) 设 A_1, A_2, A_3 是 C 上的三个点, 直线 A_1A_2, A_1A_3 均与 $\odot M$ 相切, 判断直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 的位置关系, 并说明理由.

解析: (1) $C: y^2 = x$, $\odot M: (x-2)^2 + y^2 = 1$.

(2) 设 $A_1(a^2, a), A_2(b^2, b), A_3(c^2, c)$.

$l_{A_1A_2}: y - a = \dfrac{1}{a+b}(x - a^2) \Rightarrow x - (a+b)y + ab = 0$, 所以

$$d = r \Rightarrow \frac{|2+ab|}{\sqrt{1+(a+b)^2}} = 1. \qquad ①$$

$l_{A_1A_3}: y - a = \dfrac{1}{a+c}(x - a^2) \Rightarrow x - (a+c)y + ac = 0$, 所以

$$d = r \Rightarrow \frac{|2+ac|}{\sqrt{1+(a+c)^2}} = 1. \qquad ②$$

所以 a、c 是方程 $\dfrac{|2+ax|}{\sqrt{1+(a+x)^2}} = 1 \Rightarrow (a^2-1)x^2 + 2ax - a^2 + 3 = 0$ 的两根.

又 $l_{A_2A_3}: x - (b+c)y + bc = 0$, 所以

$$d = \frac{|2+bc|}{\sqrt{1+(b+c)^2}} = \frac{|2+\frac{3-a^2}{a^2-1}|}{\sqrt{1+(\frac{2a}{a^2-1})^2}} = \frac{|a^2+1|}{\sqrt{a^4+2a^2+1}} = 1.$$

所以 $d = r$, 即直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 相切.

21. (12 分)

已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \dfrac{x^a}{a^x}(x > 0)$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 有且仅有两个交点, 求 a 的取值范围.

解析: (1) $a = 2$ 时, $f(x) = \dfrac{x^2}{2^x}$.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot 2^x - 2^x \ln 2 \cdot x^2}{(2^x)^2} = \frac{x(2 - x\ln 2)}{2^x} = \frac{\ln 2 \cdot x(\frac{2}{\ln 2} - x)}{2^x}.$$

当 $x \in (0, \dfrac{2}{\ln 2})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (\dfrac{2}{\ln 2}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

故 $f(x)$ 在 $(0, \dfrac{2}{\ln 2})$ 上单调递增, 在 $(\dfrac{2}{\ln 2}, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 由题知 $f(x) = 1$ 在 $(0, +\infty)$ 有两不等根;

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow x^a = a^x = a\ln x = x\ln a \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}.$$

令 $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $g'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, $g(x)$ 在 $(0, e)$ 单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 单调递减.

又 $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, $g(e) = \dfrac{1}{e}$, $g(1) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

所以 $0 < \dfrac{\ln a}{a} < \dfrac{1}{e} \Rightarrow a > 1$ 且 $a \neq e$.

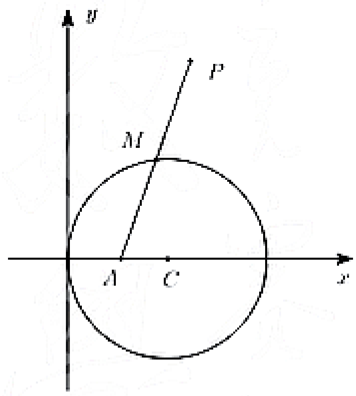
(二) 选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. 【选修 4－4: 坐标系与参数方程】(10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sqrt{2}\cos\theta$.

(1) 将 C 的极坐标方程化为直角坐标方程;

(2) 设点 A 的直角坐标为 $(1,0)$, M 为 C 上的动点, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \sqrt{2}\overrightarrow{AM}$, 写出 P 的轨迹 C_1 的参数方程, 并判断 C 与 C_1 是否有公共点.



解析：(1)$P^2 = 2\sqrt{2}\rho\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}x \Rightarrow (x-\sqrt{2})^2 + y^2 = 2$.

(2) 设 $P(x,y)$, $M(x_0,y_0)$, 由

$$\overrightarrow{AP} = \sqrt{2}\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1,y) + (1,0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}y\right).$$

又 M 在 C 上, 所以

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{3}{2}\sqrt{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2 = 2 \Rightarrow (x + \sqrt{2} - 3)^2 + y^2 = 4.$$

则 C 为 $(3-\sqrt{2},0)$ 为圆心，半径为 2 的圆. 所以 C 的参数方程为

$$\begin{cases} x + \sqrt{2} - 3 = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{2} + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$$

$|C_1C| < |r_1 - r_2|$.

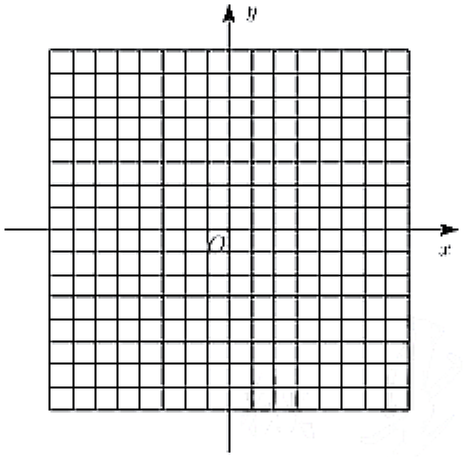
所以, 两圆为内含关系. 所以, 圆 C 与圆 C_1 无公共点.

23. 【选修 4－5: 不等式选讲】(10 分)

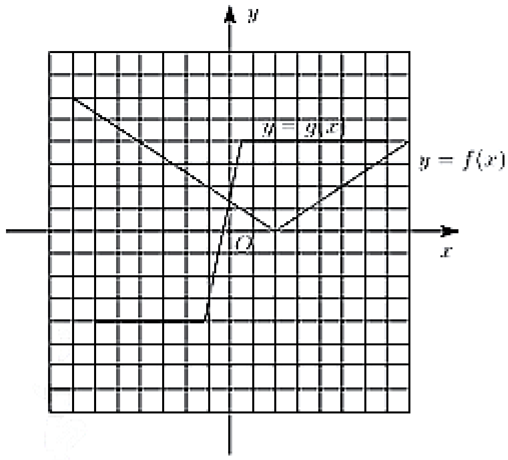
已为函数 $f(x) = |x-2|, g(x) = |2x+3| - |2x-1|$.

(1) 画出 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图像;

(2) 若 $f(x+a) \geqslant g(x)$, 求 a 的取值范围.



题图



解析图

解析：(1)

$$f(x)=\begin{cases}x-2 & x\geqslant 2\\ 2-x & x<2\end{cases};\ g(x)=\begin{cases}-4 & x\leqslant -\dfrac{3}{2}\\ 4x+2 & -\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{1}{2}\\ 4 & x\geqslant \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

(2) 当 $a\leqslant 0$ 时，恒不满足，此时 $f(2-a+a)=0<g(2-a)=4$；

当 $a>0$ 时，$f(x+a)\geqslant g(x)$ 恒成立，必有

$$f(\frac{1}{2}+a)\geqslant g(\frac{1}{2})\Leftrightarrow |a-\frac{3}{2}|\geqslant 4\Rightarrow a\geqslant \frac{11}{2}.$$

当 $a\geqslant \dfrac{11}{2}$ 时，

1° $x<-\dfrac{3}{2}$ 时，$g(x)\leqslant 0$，$f(x)\geqslant 0$，所以 $f(x)\geqslant g(x)$．

2° $x\in[-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}]$ 时 $g(x)=4x+2$，$f(x)=x+a-2$．令 $F(x)=f(x)-g(x)=-3x+a-4$．所以

$$F(x)\geqslant F(\frac{1}{2})=a-\frac{11}{2}\geqslant 0.$$

3° $x\in(\dfrac{1}{2},+\infty)$，$f(x)=x+a-2$，$g(x)=4$．

$F(x)=f(x)-g(x)=x+a-6$．所以 $F(x)>F(\dfrac{1}{2})=0$．

所以，$a\in\left[\dfrac{11}{2},+\infty\right)$．