2021年普通高等学校招生全国统一考试（甲卷）

文科数学参考答案

一、选择题

1.B　2.C　3.B　4.D　5.A　6.C　7.D　8.D　9.A　10.C　11.A　12.C

二、填空题

13. $3\sqrt{2}$　14. 39π　15. $-\sqrt{3}$　16. 8

三、解答题

（一）必考题

17. （1）75%；60%；（2）能.

18. 【详解】∵数列$\left\{\sqrt{S_n}\right\}$是等差数列，设公差为$d=\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\sqrt{a_2+a_1}-\sqrt{a_1}=\sqrt{a_1}$

$\therefore \sqrt{S_n}=\sqrt{a_1}+(n-1)\sqrt{a_1}=n\sqrt{a_1}$，$(n\in \mathbf{N}^*)$

$\therefore S_n=a_1n^2$，$(n\in \mathbf{N}^*)$

∴当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=a_1n^2-a_1(n-1)^2=2a_1n-a_1$

当$n=1$时，$2a_1\times 1-a_1=a_1$，满足$a_n=2a_1n-a_1$，

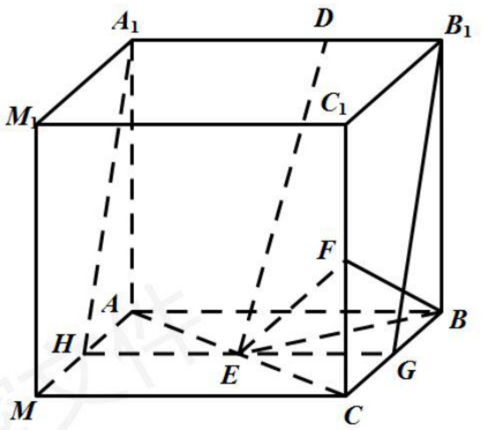
$\therefore \{a_n\}$的通项公式为$a_n=2a_1n-a_1$，$(n\in \mathbf{N}^*)$

$\therefore a_n-a_{n-1}=(2a_1n-a_1)-\left[2a_1(n-1)-a_1\right]=2a_1$

$\therefore \{a_n\}$是等差数列.

19. (1)$\dfrac{1}{3}$；

（2）由（1）的结论可将几何体补形为一个棱长为2的正方体$ABCM-A_1B_1C_1M_1$，如图所示，取棱AM,BC的中点H,G，连结A_1H,HG,GB_1，



正方形 BCC_1B_1 中，G,F 为中点，则 $BF \perp B_1G$，

又 $BF \perp A_1B_1, A_1B_1 \cap B_1G = B_1$，

故 $BF \perp$ 平面 A_1B_1GH，而 $DE \subset$ 平面 A_1B_1GH，

从而 $BF \perp DE$.

20. （1）$f(x)$ 的减区间为 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$，增区间为 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$；（2）$a > \dfrac{1}{e}$.

21. （1）抛物线 $C: y^2 = x$，$\odot M$ 方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 1$；

（2）相切，[方法一]：设 $A_1(x_1y_1), A_2(x_2,y_2), A_3(x_3,y_3)$

若 A_1A_2 斜率不存在，则 A_1A_2 方程为 $x=1$ 或 $x=3$，

若 A_1A_2 方程为 $x=1$，根据对称性不妨设 $A_1(1,1)$，

则过 A_1 与圆 M 相切的另一条直线方程为 $y=1$，

此时该直线与抛物线只有一个交点，即不存在 A_3，不合题意；

若 A_1A_2 方程为 $x=3$，根据对称性不妨设 $A_1(3,\sqrt{3}), A_2(3,-\sqrt{3})$,

则过 A_1 与圆 M 相切的直线 A_1A_3 为 $y-\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$，

又 $k_{A_1A_3} = \dfrac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} = \dfrac{1}{y_1 + y_3} = \dfrac{1}{\sqrt{3} + y_3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \therefore y_3 = 0$，

$x_3 = 0, A_3(0,0)$，此时直线 A_1A_3, A_2A_3 关于 x 轴对称，

所以直线 A_2A_3 与圆 M 相切；

若直线 A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 斜率均存在，

则 $k_{A_1A_2}=\dfrac{1}{y_1+y_2}, k_{A_1A_3}=\dfrac{1}{y_1+y_3}, k_{A_2A_3}=\dfrac{1}{y_2+y_3}$，

所以直线 A_1A_2 方程为 $y-y_1=\dfrac{1}{y_1+y_2}\left(x-x_1\right)$，

整理得 $x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$，

同理直线 A_1A_3 的方程为 $x-(y_1+y_3)y+y_1y_3=0$，

直线 A_2A_3 的方程为 $x-(y_2+y_3)y+y_2y_3=0$，

$\because A_1A_2$ 与圆 M 相切，$\therefore \dfrac{|2+y_1y_2|}{\sqrt{1+(y_1+y_2)^2}}=1$

整理得 $(y_1^2-1)y_2^2+2y_1y_2+3-y_1^2=0$，

A_1A_3 与圆 M 相切，同理 $(y_1^2-1)y_3^2+2y_1y_3+3-y_1^2=0$

所以 y_2, y_3 为方程 $(y_1^2-1)y^2+2y_1y+3-y_1^2=0$ 的两根，

$y_2+y_3=-\dfrac{2y_1}{y_1^2-1}, y_2\cdot y_3=\dfrac{3-y_1^2}{y_1^2-1}$，

M 到直线 A_2A_3 的距离为：

$$\frac{|2+y_2y_3|}{\sqrt{1+(y_2+y_3)^2}}=\frac{|2+\frac{3-y_1^2}{y_1^2-1}|}{\sqrt{1+(-\frac{2y_1}{y_1^2-1})^2}}$$

$$=\frac{|y_1^2+1|}{\sqrt{(y_1^2-1)^2+4y_1^2}}=\frac{y_1^2+1}{y_1^2+1}=1,$$

所以直线 A_2A_3 与圆 M 相切；

综上若直线 A_1A_2, A_1A_3 与圆 M 相切，则直线 A_2A_3 与圆 M 相切.

[方法二]【最优解】：设 $A_1\left(x_1,y_1\right), y_1^2=x_1, A_3\left(x_3,y_3\right), y_3^2=x_3, A_2\left(x_2,y_2\right), y_2^2=x_2$.

当 $x_1=x_2$ 时，同解法 1.

当 $x_1\neq x_2$ 时，直线 A_1A_2 的方程为 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$，即 $y=\dfrac{x}{y_1+y_2}+\dfrac{y_1y_2}{y_1+y_2}$.

由直线 A_1A_2 与 $\odot M$ 相切得 $\dfrac{\left|\dfrac{2+y_1y_2}{y_1+y_2}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{y_1+y_2}\right)^2+1}}=1$，化简得 $2y_1y_2+(x_1-1)x_2-x_1+3=0$，

同理，由直线 A_1A_3 与 $\odot M$ 相切得 $2y_1y_3+(x_1-1)x_3-x_1+3=0$.

因为方程 $2y_1y+(x_1-1)x-x_1+3=0$ 同时经过点 A_2,A_3，所以 A_2A_3 的直线方程为

$2y_1y+(x_1-1)x-x_1+3=0$，点 M 到直线 A_2A_3 距离为 $\dfrac{|2(x_1-1)-x_1+3|}{\sqrt{4y_1^2+(x_1-1)^2}}=\dfrac{|x_1+1|}{\sqrt{(x_1+1)^2}}=1$.

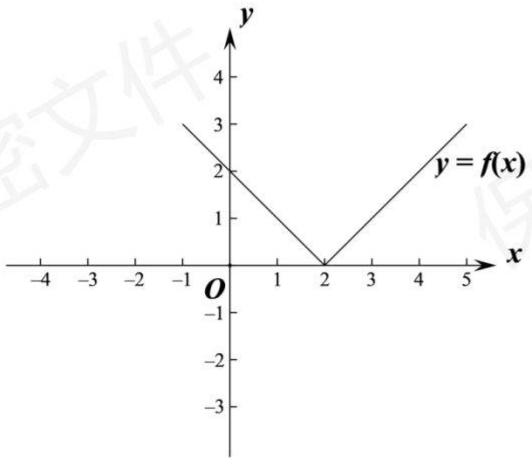
所以直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 相切.

综上所述，若直线 A_1A_2,A_1A_3 与 $\odot M$ 相切，则直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 相切.

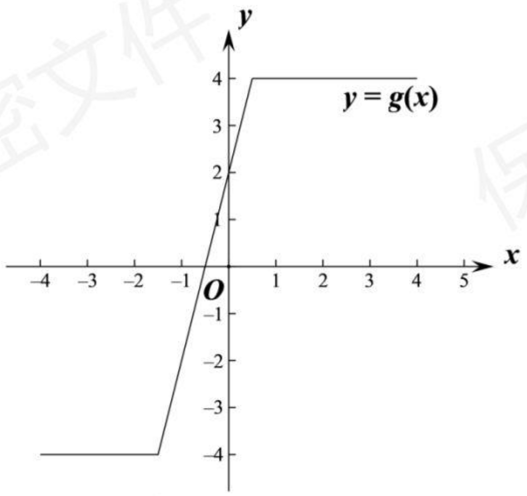
（二）选考题

22.（1）$\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2=2$；（2）$P$ 的轨迹 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=3-\sqrt{2}+2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），C 与 C_1 没有公共点.

23.（1）可得 $f(x)=|x-2|=\begin{cases}2-x,x<2\\ x-2,x\geq 2\end{cases}$，画出图像如下：



$$g(x)=|2x+3|-|2x-1|=\begin{cases}-4, x<-\dfrac{3}{2}\\ 4x+2, -\dfrac{3}{2}\le x<\dfrac{1}{2}\\ 4, x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$$，画出函数图像如下：



（2）$a\ge\dfrac{11}{2}$