# 2021 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）数学

## 第一部分（选择题共 40 分）

**一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.**

1. 已知集合 $A=\{x\mid -1<x<1\}$，$B=\{x\mid 0\le x\le 2\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $(-1,2)$　　B. $(-1,2]$　　C. $[0,1)$　　D. $[0,1]$

【答案】B

【解析】

【分析】结合题意利用并集的定义计算即可.

【详解】由题意可得：$A\cup B=\{x\mid -1<x\le 2\}$，即 $A\cup B=(-1,2]$.

故选：B.

2. 在复平面内，复数 $z$ 满足 $(1-i)z=2$，则 $z=$（　　）

A. $2+i$　　B. $2-i$　　C. $1-i$　　D. $1+i$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意利用复数的运算法则整理计算即可求得最终结果.

【详解】由题意可得：$z=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2(1+i)}{2}=1+i$.

故选：D.

3. 已知 $f(x)$ 是定义在上 $[0,1]$ 的函数, 那么“函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增”是“函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】利用两者之间的推出关系可判断两者之间的条件关系.

【详解】若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$，

若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$,

比如 $f(x)=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$,

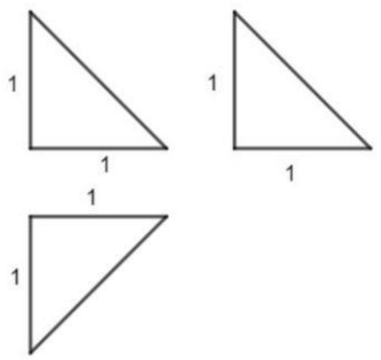
但 $f(x)=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$ 在 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ 为减函数, 在 $\left[\frac{1}{3},1\right]$ 为增函数,

故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$ 推不出 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增,

故"函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增"是"$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$"的充分不必要条件,

故选：A.

4. 某四面体的三视图如图所示，该四面体的表面积为（　　）




A. $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$　　B. 4　　C. $3+\sqrt{3}$　　D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】根据三视图可得如图所示的几何体（三棱锥），根据三视图中的数据可计算该几何体的表面积.

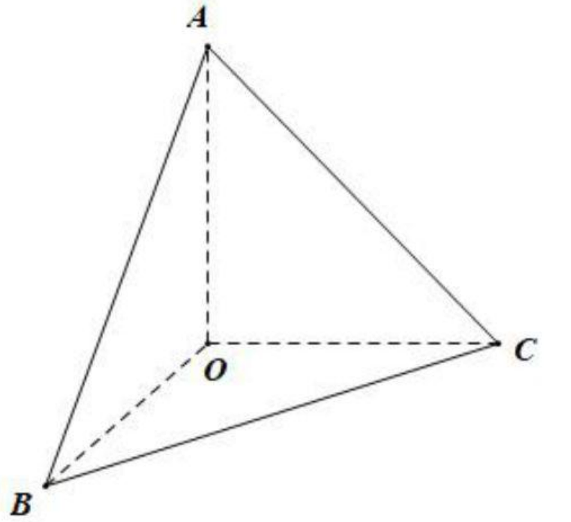
【详解】根据三视图可得如图所示的几何体-正三棱锥 $O-ABC$,

其侧面为等腰直角三角形，底面等边三角形,

由三视图可得该正三棱锥的侧棱长为 1,

故其表面积为 $3\times\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\sqrt{2}\right)^2=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$,

故选：A.




5. 双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$过点$\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$，且离心率为$2$，则该双曲线的标准方程为（　　）

A. $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$　　B. $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$　　C. $x^2-\dfrac{\sqrt{3}y^2}{3}=1$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}x^2}{3}-y^2=1$

【答案】B

【解析】

【分析】分析可得$b=\sqrt{3}a$，再将点$\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$代入双曲线的方程，求出$a$的值，即可得出双曲线的标准方程.

【详解】$\because e=\dfrac{c}{a}=2$，则$c=2a$，$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{3}a$，则双曲线的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3a^2}=1$，

将点$\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$的坐标代入双曲线的方程可得$\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{3}{3a^2}=\dfrac{1}{a^2}=1$，解得$a=1$，故$b=\sqrt{3}$，

因此，双曲线的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

故选：B

6. $\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个等差数列，其中$\dfrac{a_k}{b_k}\left(1\le k\le 5\right)$为常值，$a_1=288$，$a_5=96$，$b_1=192$，则$b_3=$（　　）

A. $64$　　B. $128$　　C. $256$　　D. $512$

【答案】B

【解析】

【分析】由已知条件求出$b_5$的值，利用等差中项的性质可求得$b_3$的值.

【详解】由已知条件可得$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_5}{b_5}$，则$b_5=\frac{a_5b_1}{a_1}=\frac{96\times 192}{288}=64$，因此，$b_3=\frac{b_1+b_5}{2}=\frac{192+64}{2}=128$.

故选：B.

7. 函数$f(x)=\cos x-\cos 2x$，试判断函数的奇偶性及最大值（　　）

A. 奇函数，最大值为2　　B. 偶函数，最大值为2

C. 奇函数，最大值为$\frac{9}{8}$　　D. 偶函数，最大值为$\frac{9}{8}$

【答案】D

【解析】

【分析】由函数奇偶性的定义结合三角函数的性质可判断奇偶性；利用二倍角公式结合二次函数的性质可判断最大值.

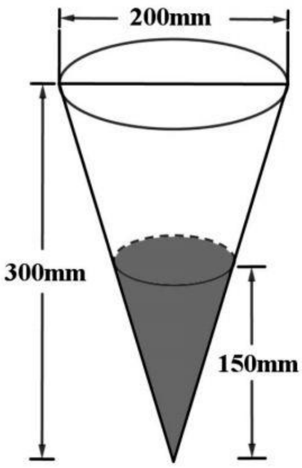
【详解】由题意，$f(-x)=\cos\left(-x\right)-\cos\left(-2x\right)=\cos x-\cos 2x=f\left(x\right)$，所以该函数为偶函数，

又$f(x)=\cos x-\cos 2x=-2\cos^2 x+\cos x+1=-2\left(\cos x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$，

所以当$\cos x=\frac{1}{4}$时，$f(x)$取最大值$\frac{9}{8}$.

故选：D.

8. 定义：24小时内降水在平地上积水厚度（mm）来判断降雨程度. 其中小雨（$<10$mm），中雨（10mm－25mm），大雨（25mm－50mm），暴雨（50mm－100mm），小明用一个圆锥形容器接了24小时的雨水，如图，则这天降雨属于哪个等级（ ）




A. 小雨　　B. 中雨　　C. 大雨　　D. 暴雨

【答案】B

【解析】

【分析】计算出圆锥体积，除以圆面的面积即可得降雨量，即可得解.

【详解】由题意，一个半径为$\frac{200}{2}=100\left(\mathrm{mm}\right)$的圆面内的降雨充满一个底面半径为$\frac{200}{2}\times\frac{150}{300}=50\left(\mathrm{mm}\right)$，高为$150\left(\mathrm{mm}\right)$的圆锥，

所以积水厚度$d=\frac{\frac{1}{3}\pi\times50^2\times150}{\pi\times100^2}=12.5\left(\mathrm{mm}\right)$，属于中雨.

故选：B.

9. 已知圆$C:x^2+y^2=4$，直线$l:y=kx+m$，当$k$变化时，$l$截得圆$C$弦长的最小值为2，则$m=$（　　）

A. $\pm2$　　B. $\pm\sqrt{2}$　　C. $\pm\sqrt{3}$　　D. $\pm\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】先求得圆心到直线距离，即可表示出弦长，根据弦长最小值得出$m$

【详解】由题可得圆心为$\left(0,0\right)$，半径为2，

则圆心到直线的距离$d=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$，

则弦长为$2\sqrt{4-\frac{m^2}{k^2+1}}$，

则当 $k=0$ 时，弦长取得最小值为 $2\sqrt{4-m^2}=2$，解得 $m=\pm\sqrt{3}$.

故选：C

10. 数列 $\{a_n\}$ 是递增的整数数列，且 $a_1\geq 3$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=100$，则 $n$ 的最大值为（　　）

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

【答案】C

【解析】

【分析】使数列首项、递增幅度均最小，结合等差数列的通项及求和公式即可得解.

【详解】若要使 $n$ 尽可能的大，则 $a_1$，递增幅度要尽可能小，

不妨设数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3，公差为 1 的等差数列，其前 $n$ 项和为 $S_n$，

则 $a_n=n+2$，$S_{11}=\dfrac{3+13}{2}\times 11=88<100$，$S_{12}=\dfrac{3+14}{2}\times 12=102>100$，

所以 $n$ 的最大值为 11.

故选：C.

## 第二部分（非选择题共 110 分）

## 二、填空题 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. $(x^3-\dfrac{1}{x})^4$ 展开式中常数项为_________.

【答案】$-4$

【解析】

【详解】试题分析：$\left(x^3-\dfrac{1}{x}\right)^4$ 的展开式的通项 $T_{r+1}=C_4^r\left(x^3\right)^{4-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r=\left(-1\right)^r C_4^r x^{12-4r}$，

令 $r=3$ 得常数项为 $T_4=\left(-1\right)^3 C_4^3=-4$.

考点：二项式定理.

12. 已知抛物线 $C:y^2=4x$，焦点为 $F$，点 $M$ 为抛物线 $C$ 上的点，且 $|FM|=6$，则 $M$ 的横坐标是_______；作 $MN\perp x$ 轴于 $N$，则 $S_{\triangle FMN}=$_______.

【答案】　①. 5　　②. $4\sqrt{5}$

【解析】

【分析】根据焦半径公式可求 $M$ 的横坐标，求出纵坐标后可求 $S_{\triangle FMN}$.

【详解】因为抛物线的方程为 $y^2=4x$，故 $p=2$ 且 $F\left(1,0\right)$.

因为 $\left|MF\right|=6$，$x_M+\frac{p}{2}=6$，解得 $x_M=5$，故 $y_M=\pm 2\sqrt{5}$，

所以 $S_{\triangle FMN}=\frac{1}{2}\times(5-1)\times 2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$，

故答案为：5，$4\sqrt{5}$.

13. $\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(2,-1)$，$\vec{c}=(0,1)$，则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=$______；$\vec{a}\cdot\vec{b}=$______.

【答案】　①. 0　②. 3

【解析】

【分析】根据坐标求出 $\vec{a}+\vec{b}$，再根据数量积的坐标运算直接计算即可.

【详解】$\because \vec{a}=(2,1),\vec{b}=(2,-1),\vec{c}=(0,1)$，

$\therefore \vec{a}+\vec{b}=\left(4,0\right)$，$\therefore(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=4\times 0+0\times 1=0$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=2\times 2+1\times\left(-1\right)=3$.

故答案为：0；3.

14. 若点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 与点 $Q(\cos(\theta+\frac{\pi}{6}),\sin(\theta+\frac{\pi}{6}))$ 关于 $y$ 轴对称，写出一个符合题意的 $\theta=$___.

【答案】$\frac{5\pi}{12}$（满足 $\theta=\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in Z$ 即可）

【解析】

【分析】根据 $P,Q$ 在单位圆上，可得 $\theta,\theta+\frac{\pi}{6}$ 关于 $y$ 轴对称，得出 $\theta+\frac{\pi}{6}+\theta=\pi+2k\pi,k\in Z$ 求解.

【详解】$\because P(\cos\theta,\sin\theta)$ 与 $Q\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right),\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right)$ 关于 $y$ 轴对称，

即 $\theta,\theta+\frac{\pi}{6}$ 关于 $y$ 轴对称，

$\theta+\frac{\pi}{6}+\theta=\pi+2k\pi,k\in Z$，

则 $\theta=k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in Z$，

当 $k=0$ 时，可取 $\theta$ 的一个值为 $\frac{5\pi}{12}$.

故答案为：$\dfrac{5\pi}{12}$ （满足$\theta = k\pi + \dfrac{5\pi}{12}, k \in Z$即可）．

15. 已知函数$f(x)=|\lg x|-kx-2$，给出下列四个结论：

①若$k=0$，则$f(x)$有两个零点；

②$\exists k<0$，使得$f(x)$有一个零点；

③$\exists k<0$，使得$f(x)$有三个零点；

④$\exists k>0$，使得$f(x)$有三个零点.

以上正确结论得序号是______.

【答案】①②④

【解析】

【分析】由$f\left(x\right)=0$可得出$|\lg x|=kx+2$，考查直线$y=kx+2$与曲线$g\left(x\right)=|\lg x|$的左、右支分别相切的情形，利用方程思想以及数形结合可判断各选项的正误.

【详解】对于①，当$k=0$时，由$f\left(x\right)=|\lg x|-2=0$，可得$x=\dfrac{1}{100}$或$x=100$，①正确；

对于②，考查直线$y=kx+2$与曲线$y=-\lg x\left(0<x<1\right)$相切于点$P\left(t,-\lg t\right)$，

对函数$y=-\lg x$求导得$y'=-\dfrac{1}{x\ln 10}$，由题意可得$\begin{cases} kt+2=-\lg t \\ k=-\dfrac{1}{t\ln 10} \end{cases}$，解得$\begin{cases} t=\dfrac{e}{100} \\ k=-\dfrac{100}{e}\lg e \end{cases}$，

所以，存在$k=-\dfrac{100}{e}\lg e<0$，使得$f\left(x\right)$只有一个零点，②正确；

对于③，当直线$y=kx+2$过点$\left(1,0\right)$时，$k+2=0$，解得$k=-2$，

所以，当$-\dfrac{100}{e}\lg e<k<-2$时，直线$y=kx+2$与曲线$y=-\lg x\left(0<x<1\right)$有两个交点，

若函数$f\left(x\right)$有三个零点，则直线$y=kx+2$与曲线$y=-\lg x\left(0<x<1\right)$有两个交点，

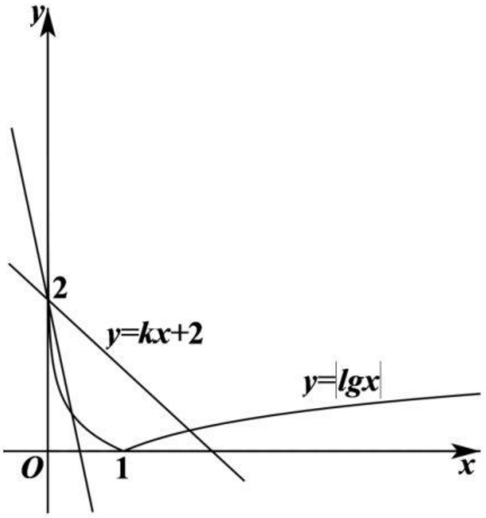
直线$y=kx+2$与曲线$y=\lg x\left(x>1\right)$有一个交点，所以，$\begin{cases} -\dfrac{100}{e}\lg e<k<-2 \\ k+2>0 \end{cases}$，此不等式无解，

因此，不存在$k<0$，使得函数$f\left(x\right)$有三个零点，③错误；

对于④，考查直线 $y=kx+2$ 与曲线 $y=\lg x\left(x>1\right)$ 相切于点 $P\left(t,\lg t\right)$，

对函数 $y=\lg x$ 求导得 $y'=\dfrac{1}{x\ln 10}$，由题意可得 $\begin{cases}kt+2=\lg t\\k=\dfrac{1}{t\ln 10}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}t=100e\\k=\dfrac{\lg e}{100e}\end{cases}$，

所以，当 $0<k<\dfrac{\lg e}{100e}$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 有三个零点，④正确.




故答案为：①②④.

【点睛】思路点睛：已知函数的零点或方程的根的情况，求解参数的取值范围问题的本质都是研究函数的零点问题，求解此类问题的一般步骤：

（1）转化，即通过构造函数，把问题转化成所构造函数的零点问题；

（2）列式，即根据函数的零点存在定理或结合函数的图象列出关系式；

（3）得解，即由列出的式子求出参数的取值范围.

## 三、解答题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$c=2b\cos B$，$C=\dfrac{2\pi}{3}$.

（1）求 $B$ 的大小；

（2）在下列三个条件中选择一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，并求出 $BC$ 边上的中线的长度.

①$c=\sqrt{2}b$；②周长为 $4+2\sqrt{3}$；③面积为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$；

【答案】(1) $\frac{\pi}{6}$；(2) 答案不唯一，具体见解析.

【解析】

【分析】(1) 由正弦定理化边为角即可求解；

(2) 若选择①：由正弦定理求解可得不存在；

若选择②：由正弦定理结合周长可求得外接圆半径，即可得出各边，再由余弦定理可求；

若选择③：由面积公式可求各边长，再由余弦定理可求.

【详解】(1) $\because c=2b\cos B$，则由正弦定理可得 $\sin C=2\sin B\cos B$，

$\therefore \sin 2B=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\because C=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore B\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，$2B\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，

$\therefore 2B=\frac{\pi}{3}$，解得 $B=\frac{\pi}{6}$；

(2) 若选择①：由正弦定理结合 (1) 可得 $\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，

与 $c=\sqrt{2}b$ 矛盾，故这样的 $\triangle ABC$ 不存在；

若选择②：由 (1) 可得 $A=\frac{\pi}{6}$，

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $R$，

则由正弦定理可得 $a=b=2R\sin\frac{\pi}{6}=R$，

$c=2R\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}R$，

则周长 $a+b+c=2R+\sqrt{3}R=4+2\sqrt{3}$，

解得 $R=2$，则 $a=2,c=2\sqrt{3}$，

由余弦定理可得 $BC$ 边上的中线的长度为：

$$\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+1^2-2\times 2\sqrt{3}\times 1\times\cos\frac{\pi}{6}}=\sqrt{7}；$$

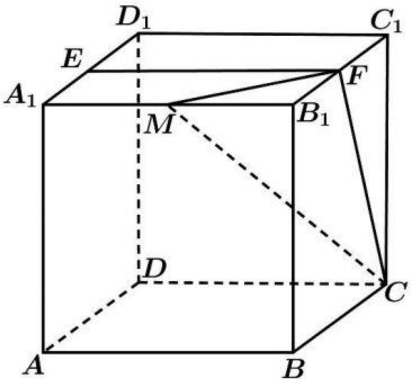
若选择③：由 (1) 可得 $A=\frac{\pi}{6}$，即 $a=b$，

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，解得 $a=\sqrt{3}$，

则由余弦定理可得 $BC$ 边上的中线的长度为：

$\sqrt{b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\times b\times\frac{a}{2}\times\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{3+\frac{3}{4}+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

17. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点 $E$ 为 $A_1D_1$ 中点，直线 $B_1C_1$ 交平面 $CDE$ 于点 $F$.




（1）证明：点 $F$ 为 $B_1C_1$ 的中点；

（2）若点 $M$ 为棱 $A_1B_1$ 上一点，且二面角 $M-CF-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$，求 $\frac{A_1M}{A_1B_1}$ 的值.

【答案】（1）证明见解析；（2） $\frac{A_1M}{A_1B_1}=\frac{1}{2}$.

【解析】

【分析】(1)首先将平面 $CDE$ 进行扩展，然后结合所得的平面与直线 $B_1C_1$ 的交点即可证得题中的结论；

(2)建立空间直角坐标系，利用空间直角坐标系求得相应平面的法向量，然后解方程即可求得实数 $\lambda$ 的值.

【详解】(1)如图所示，取 $B_1C_1$ 的中点 $F'$，连结 $DE,EF',F'C$，

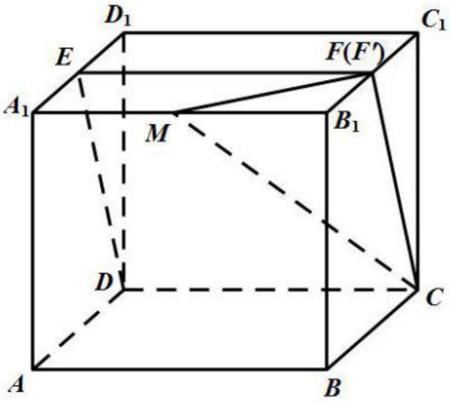
由于 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，$E,F'$ 为中点，故 $EF'\parallel CD$，

从而 $E,F',C,D$ 四点共面，即平面 $CDE$ 即平面 $CDEF'$，

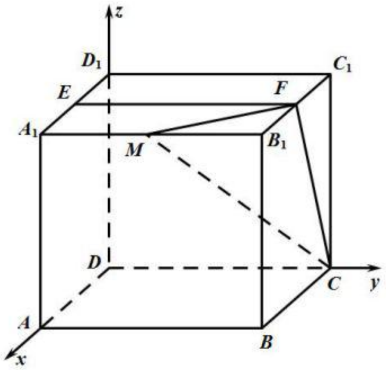
据此可得：直线 $B_1C_1$ 交平面 $CDE$ 于点 $F'$，

当直线与平面相交时只有唯一的交点，故点 $F$ 与点 $F'$ 重合，

即点 $F$ 为 $B_1C_1$ 中点.




(2)以点$D$为坐标原点，$DA,DC,DD_1$方向分别为$x$轴，$y$轴，$z$轴正方形，建立空间直角坐标系$D-xyz$，




不妨设正方体的棱长为2，设$\frac{A_1M}{A_1B_1}=\lambda\left(0\le\lambda\le1\right)$，

则：$M\left(2,2\lambda,2\right),C\left(0,2,0\right),F\left(1,2,2\right),E\left(1,0,2\right)$，

从而：$\overrightarrow{MC}=\left(-2,2-2\lambda,-2\right),\overrightarrow{CF}=\left(1,0,2\right),\overrightarrow{FE}=\left(0,-2,0\right)$，

设平面$MCF$的法向量为：$\vec{m}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，则：

$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{MC}=-2x_1+\left(2-2\lambda\right)y_1-2z_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CF}=x_1+2z_1=0\end{cases},$$

令$z_1=-1$可得：$\vec{m}=\left(2,\frac{1}{1-\lambda},-1\right)$，

设平面$CFE$的法向量为：$\vec{n}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$，则：

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{FE}=-2y_2=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CF}=x_2+2z_2=0\end{cases},$$

令 $z_1=-1$ 可得：$\vec{n}=(2,0,-1)$，

从而：$\vec{m}\cdot\vec{n}=5,\left|\vec{m}\right|=\sqrt{5+\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2},\left|\vec{n}\right|=\sqrt{5}$，

则：$\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\times\left|\vec{n}\right|}=\frac{5}{\sqrt{5+\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

整理可得：$(\lambda-1)^2=\frac{1}{4}$，故 $\lambda=\frac{1}{2}$（$\lambda=\frac{3}{2}$ 舍去）．

**【点睛】**本题考查了立体几何中的线面关系和二面角的求解问题，意在考查学生的空间想象能力和逻辑推理能力，对于立体几何中角的计算问题，往往可以利用空间向量法，通过求解平面的法向量，利用向量的夹角公式求解.

18. 为加快新冠肺炎检测效率，某检测机构采取“$k$ 合 1 检测法”，即将 $k$ 个人的拭子样本合并检测，若为阴性，则可以确定所有样本都是阴性的；若为阳性，则还需要对本组的每个人再做检测．现有 100 人，已知其中 2 人感染病毒.

（1）①若采用“10 合 1 检测法”，且两名患者在同一组，求总检测次数；

②已知 10 人分成一组，分 10 组，两名感染患者在同一组的概率为 $\frac{1}{11}$，定义随机变量 $X$ 为总检测次数，求检测次数 $X$ 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（2）若采用“5 合 1 检测法”，检测次数 $Y$ 的期望为 $E(Y)$，试比较 $E(X)$和 $E(Y)$的大小(直接写出结果).

**【答案】**（1）① 20 次；②分布列见解析；期望为 $\frac{320}{11}$；（2）$E(Y)>E(X)$.

**【解析】**

**【分析】**（1）①由题设条件还原情境，即可得解；

②求出 $X$ 的取值情况，求出各情况下的概率，进而可得分布列，再由期望的公式即可得解；

（2）求出两名感染者在一组的概率，进而求出 $E(Y)$，即可得解.

**【详解】**（1）①对每组进行检测，需要 10 次；再对结果为阳性的组每个人进行检测，需要 10 次；

所以总检测次数为 20 次；

②由题意，$X$ 可以取 20，30，

$P(X=20)=\frac{1}{11}$，$P(X=30)=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$，

则 $X$ 的分布列:

| $X$ | 20 | 30 |
| --- | --- | --- |
| $P$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{10}{11}$ |

所以$E\left(X\right)=20\times\frac{1}{11}+30\times\frac{10}{11}=\frac{320}{11}$；

（2）由题意，$Y$ 可以取 25，30,

两名感染者在同一组的概率为$P_1=\frac{20C_2^2C_{98}^3}{C_{100}^5}=\frac{4}{99}$，不在同一组的概率为$P_1=\frac{95}{99}$，

则$E\left(Y\right)=25\times\frac{4}{99}+30\times\frac{95}{99}=\frac{2950}{99}>E\left(X\right)$.

19. 已知函数$f\left(x\right)=\frac{3-2x}{x^2+a}$.

（1）若$a=0$，求$y=f\left(x\right)$在$\left(1,f\left(1\right)\right)$处切线方程;

（2）若函数$f\left(x\right)$在$x=-1$处取得极值，求$f\left(x\right)$的单调区间，以及最大值和最小值.

【答案】（1）$4x+y-5=0$；（2）函数$f\left(x\right)$的增区间为$\left(-\infty,-1\right)$、$\left(4,+\infty\right)$，单调递减区间为$\left(-1,4\right)$，最大值为$1$，最小值为$-\frac{1}{4}$.

【解析】

【分析】（1）求出$f\left(1\right)$、$f'\left(1\right)$的值，利用点斜式可得出所求切线的方程;

（2）由$f'\left(-1\right)=0$可求得实数$a$的值，然后利用导数分析函数$f\left(x\right)$的单调性与极值，由此可得出结果.

【详解】（1）当$a=0$时，$f\left(x\right)=\frac{3-2x}{x^2}$，则$f'\left(x\right)=\frac{2\left(x-3\right)}{x^3}$，$\therefore f\left(1\right)=1$，$f'\left(1\right)=-4$，

此时，曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程为$y-1=-4\left(x-1\right)$，即$4x+y-5=0$；

（2）因为$f\left(x\right)=\frac{3-2x}{x^2+a}$，则$f'\left(x\right)=\frac{-2\left(x^2+a\right)-2x\left(3-2x\right)}{\left(x^2+a\right)^2}=\frac{2\left(x^2-3x-a\right)}{\left(x^2+a\right)^2}$，

由题意可得$f'\left(-1\right)=\frac{2\left(4-a\right)}{\left(a+1\right)^2}=0$，解得$a=4$，

故 $f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2+4}$，$f'(x)=\dfrac{2(x+1)(x-4)}{\left(x^2+4\right)^2}$，列表如下：

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,4)$ | $4$ | $(4,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | 增 | 极大值 | 减 | 极小值 | 增 |

所以，函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,-1)$、$(4,+\infty)$，单调递减区间为 $(-1,4)$.

当 $x<\dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)>0$；当 $x>\dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)<0$.

所以，$f(x)_{\max}=f(-1)=1$，$f(x)_{\min}=f(4)=-\dfrac{1}{4}$.

20. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $A(0,-2)$，以四个顶点围成的四边形面积为 $4\sqrt{5}$.

（1）求椭圆 $E$ 的标准方程；

（2）过点 $P(0,\ -3)$ 的直线 $l$ 斜率为 $k$，交椭圆 $E$ 于不同的两点 $B$，$C$，直线 $AB$，$AC$ 交 $y=-3$ 于点 $M$、$N$，直线 $AC$ 交 $y=-3$ 于点 $N$，若 $|PM|+|PN|\leqslant 15$，求 $k$ 的取值范围.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$；（2）$[-3,-1)\cup(1,3]$.

【解析】

【分析】（1）根据椭圆所过的点及四个顶点围成的四边形的面积可求 $a,b$，从而可求椭圆的标准方程.

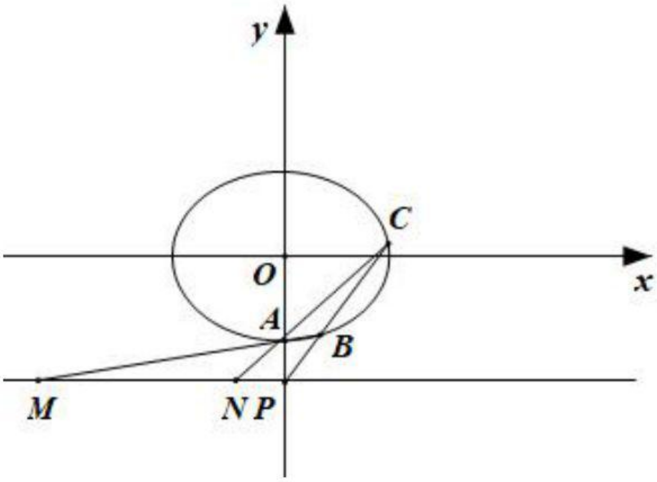
（2）设 $B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，求出直线 $AB,AC$ 的方程后可得 $M,N$ 的横坐标，从而可得 $|PM|+|PN|$，联立直线 $BC$ 的方程和椭圆的方程，结合韦达定理化简 $|PM|+|PN|$，从而可求 $k$ 的范围，注意判别式的要求.

【详解】（1）因为椭圆过 $A(0,-2)$，故 $b=2$，

因为四个顶点围成的四边形的面积为 $4\sqrt{5}$，故 $\dfrac{1}{2}\times 2a\times 2b=4\sqrt{5}$，即 $a=\sqrt{5}$，

故椭圆的标准方程为：$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)




设$B\left(x_1,y_1\right),C\left(x_2,y_2\right)$,

因为直线$BC$的斜率存在，故$x_1x_2\neq0$,

故直线$AB:y=\frac{y_1+2}{x_1}x-2$，令$y=-3$，则$x_M=-\frac{x_1}{y_1+2}$，同理$x_N=-\frac{x_2}{y_2+2}$.

直线$BC:y=kx-3$，由$\begin{cases}y=kx-3\\4x^2+5y^2=20\end{cases}$可得$\left(4+5k^2\right)x^2-30kx+25=0$,

故$\Delta=900k^2-100\left(4+5k^2\right)>0$，解得$k<-1$或$k>1$.

又$x_1+x_2=\frac{30k}{4+5k^2},x_1x_2=\frac{25}{4+5k^2}$，故$x_1x_2>0$，所以$x_Mx_N>0$

又$\left|PM\right|+\left|PN\right|=\left|x_M+x_N\right|=\left|\frac{x_1}{y_1+2}+\frac{x_2}{y_2+2}\right|$

$$=\left|\frac{x_1}{kx_1-1}+\frac{x_2}{kx_2-1}\right|=\left|\frac{2kx_1x_2-\left(x_1+x_2\right)}{k^2x_1x_2-k\left(x_1+x_2\right)+1}\right|=\left|\frac{\frac{50k}{4+5k^2}-\frac{30k}{4+5k^2}}{\frac{25k^2}{4+5k^2}-\frac{30k^2}{4+5k^2}+1}\right|=5\left|k\right|$$

故$5\left|k\right|\leq15$即$\left|k\right|\leq3$,

综上，$-3\leq k<-1$或$1<k\leq3$.

21. 定义$R_p$数列$\left\{a_n\right\}$：对实数$p$，满足：①$a_1+p\geq0$，$a_2+p=0$；②$\forall n\in N^*,a_{4n-1}<a_{4n}$；

③ $a_{m+n} \in \{a_m + a_n + p, a_m + a_n + p + 1\}$， $m,n \in N^*$.

（1）对于前 4 项 2，-2，0，1 的数列，可以是 $R_2$ 数列吗？说明理由；

（2）若 $\{a_n\}$ 是 $R_0$ 数列，求 $a_5$ 的值；

（3）是否存在 $p$，使得存在 $R_p$ 数列 $\{a_n\}$，对 $\forall n \in N^*, S_n \geq S_{10}$？若存在，求出所有这样的 $p$；若不存在，说明理由.

【答案】（1）不可以是 $R_2$ 数列；理由见解析；（2） $a_5 = 1$；（3）存在； $p = 2$.

【解析】

【分析】(1)由题意考查 $a_3$ 的值即可说明数列不是 $R_2$ 数列；

(2)由题意首先确定数列的前 4 项，然后讨论计算即可确定 $a_5$ 的值；

(3)构造数列 $b_n = a_n + p$，易知数列 $\{b_n\}$ 是 $R_0$ 的，结合(2)中的结论求解不等式即可确定满足题意的实数 $p$ 的值.

【详解】(1)由性质③结合题意可知 $0 = a_3 \in \{a_1 + a_2 + 2, a_1 + a_2 + 2 + 1\} = \{2,3\}$，

矛盾，故前 4 项 $2,-2,0,1$ 的数列，不可能是 $R_2$ 数列.

(2)性质① $a_1 \geq 0, a_2 = 0$，

由性质③ $a_{m+2} \in \{a_m, a_m + 1\}$，因此 $a_3 = a_1$ 或 $a_3 = a_1 + 1$， $a_4 = 0$ 或 $a_4 = 1$，

若 $a_4 = 0$，由性质②可知 $a_3 < a_4$，即 $a_1 < 0$ 或 $a_1 + 1 < 0$，矛盾；

若 $a_4 = 1, a_3 = a_1 + 1$，由 $a_3 < a_4$ 有 $a_1 + 1 < 1$，矛盾.

因此只能是 $a_4 = 1, a_3 = a_1$.

又因为 $a_4 = a_1 + a_3$ 或 $a_4 = a_1 + a_3 + 1$，所以 $a_1 = \frac{1}{2}$ 或 $a_1 = 0$.

若 $a_1 = \frac{1}{2}$，则 $a_2 = a_{1+1} \in \{a_1 + a_1 + 0, a_1 + a_1 + 0 + 1\} = \{2a_1, 2a_1 + 1\} = \{1,2\}$，

不满足 $a_2 = 0$，舍去.

当 $a_1 = 0$，则 $\{a_n\}$ 前四项为:0，0，0，1，

下面用纳法证明 $a_{4n+i} = n(i = 1,2,3), a_{4n+4} = n + 1(n \in N)$：

当$n=0$时，经验证命题成立，假设当$n\le k(k\ge 0)$时命题成立，

当$n=k+1$时：

若$i=1$，则$a_{4(k+1)+1}=a_{4k+5}=a_{j+(4k+5-j)}$，利用性质③：

$\left\{a_j+a_{4k+5-j}\mid j\in N^*,1\le j\le 4k+4\right\}=\{k,k+1\}$，此时可得：$a_{4k+5}=k+1$；

否则，若$a_{4k+5}=k$，取$k=0$可得：$a_5=0$，

而由性质②可得：$a_5=a_1+a_4\in\left\{1,2\right\}$，与$a_5=0$矛盾.

同理可得：

$\left\{a_j+a_{4k+6-j}\mid j\in N^*,1\le j\le 4k+5\right\}=\{k,k+1\}$，有$a_{4k+6}=k+1$；

$\left\{a_j+a_{4k+8-j}\mid j\in N^*,2\le j\le 4k+6\right\}=\{k+1,k+2\}$，有$a_{4k+8}=k+2$；

$\left\{a_j+a_{4k+7-j}\mid j\in N^*,1\le j\le 4k+6\right\}=\{k+1\}$，又因为$a_{4k+7}<a_{4k+8}$，有$a_{4k+7}=k+1$.

即当$n=k+1$时命题成立，证毕.

综上可得：$a_1=0$，$a_5=a_{4\times 1+1}=1$.

(3)令$b_n=a_n+p$，由性质③可知：

$\forall m,n\in N^*,b_{m+n}=a_{m+n}+p\in\left\{a_m+p+a_n+p,a_m+p+a_n+p+1\right\}$

$=\left\{b_m+b_n,b_m+b_n+1\right\}$，

由于$b_1=a_1+p\ge 0,b_2=a_2+p=0,b_{4n-1}=a_{4n-1}+p<a_{4n}+p=b_{4n}$，

因此数列$\left\{b_n\right\}$为$R_0$数列.

由（2）可知:

若$\forall n\in N,a_{4n+i}=n-p(i=1,2,3),a_{4n+4}=n+1-p$；

$S_{11}-S_{10}=a_{11}=a_{4\times 2+3}=2-p\ge 0$，$S_9-S_{10}=-a_{10}=-a_{4\times 2+2}=-(2-p)\ge 0$，

因此$p=2$，此时$a_1,a_2,\ldots,a_{10}\le 0$，$a_j\ge 0\left(j\ge 11\right)$，满足题意.

**【点睛】**本题属于数列中的“新定义问题”，“新定义”主要是指即时定义新概念、新公式、新定理、新法则、新运算五种，然后根据此新定义去解决问题，有时还需要用类比的方法去理解新的定义，这样有助于对新定义的透彻理解.但是，透过现象看本质，它们考查的还是基

础数学知识，所以说“新题”不一定是“难题”，掌握好三基，以不变应万变才是制胜法宝.